§ 41 Теорема Гаусса

Поток вектора напряженности. Введем еще одну физическую величину, характеризующую электрическое поле,— *поток вектора напряженности.* С помощью этой величины мы сможем рассчитать напряженности электрических полей, источниками которых являются не только точечные заряды, но и заряды, распределенные непрерывно по некоторым поверхностям — плоскости, сфере, цилиндру и т. д.

Элементарным потоком вектора напряженности через малую площадку называется произведение модуля вектора $\vec{E}$ на площадь площадки ΔS и косинус угла между вектором $\vec{E}$ и нормалью к площадке $\vec{n}_0$ (рис. 4.16):

$$\Delta\Phi = E\Delta S\cos\alpha. \tag{41.1}$$

Заметим, что если поверхность замкнутая, то выбирается внешняя нормаль к ней.

Полный поток через поверхность равен сумме элементарных потоков через все ее участки:

$$\Phi = \sum\Delta\Phi = \sum E\Delta S\cos\alpha. \tag{41.2}$$

Чтобы вычислить значение полного потока, оказывается полезным ввести еще одно вспомогательное понятие — *телесный угол.*

Мерой телесного угла Ω (рис. 4.17) служит отношение площади поверхности шарового сегмента S_0 к квадрату радиуса:

$$\Omega = S_0/r^2. \tag{41.3}$$

Единицей телесного угла является стерадиан (сокращенно: ср) — это телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы элемент, площадь которого равна квадрату радиуса. Итак, $\Omega = 1$ ср, если $S_0 = r^2$.

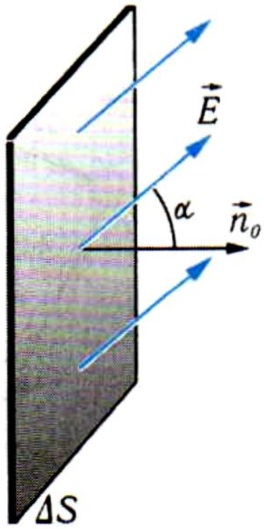

рис. 4.16

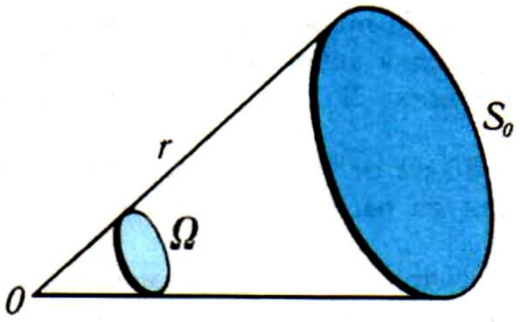

рис. 4.17

Нетрудно убедиться, что полный телесный угол вокруг точки равен 4π ср. В самом деле, поверхность сферы равна $4\pi r^2$, следовательно, $\Omega_{полн} = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi$ ср.

Теорема Гаусса. Вернемся к выражению для элементарного потока (41.1). Пусть электрическое поле создается точечным зарядом q, тогда модуль вектора напряженности $E = q/(4\pi r^2)$. Подставив в формулу (41.1), получим

$$\Delta\Phi = E\Delta S\cos\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\Delta S\cos\alpha}{r^2}.$$

Как видно из рисунка 4.18, *а*, $\Delta S\cos\alpha = \Delta S_0$, при этом площадка площадью ΔS_0 перпендикулярна радиусу. Тогда

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\Delta S_0}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\Omega. \qquad (41.4)$$

Теперь уже нетрудно получить выражение для полного потока вектора $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность:

$$\Phi = \sum\Delta\Phi = \sum\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum\Delta\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = q/\varepsilon_0.$$

Таким образом, если точечный заряд расположен внутри произвольной замкнутой поверхности, то полный поток вектора напряженности через эту поверхность равен:

$$\Phi = q/\varepsilon_0. \qquad (41.5)$$

Обращаем внимание читателя на тот факт, что этот ре-

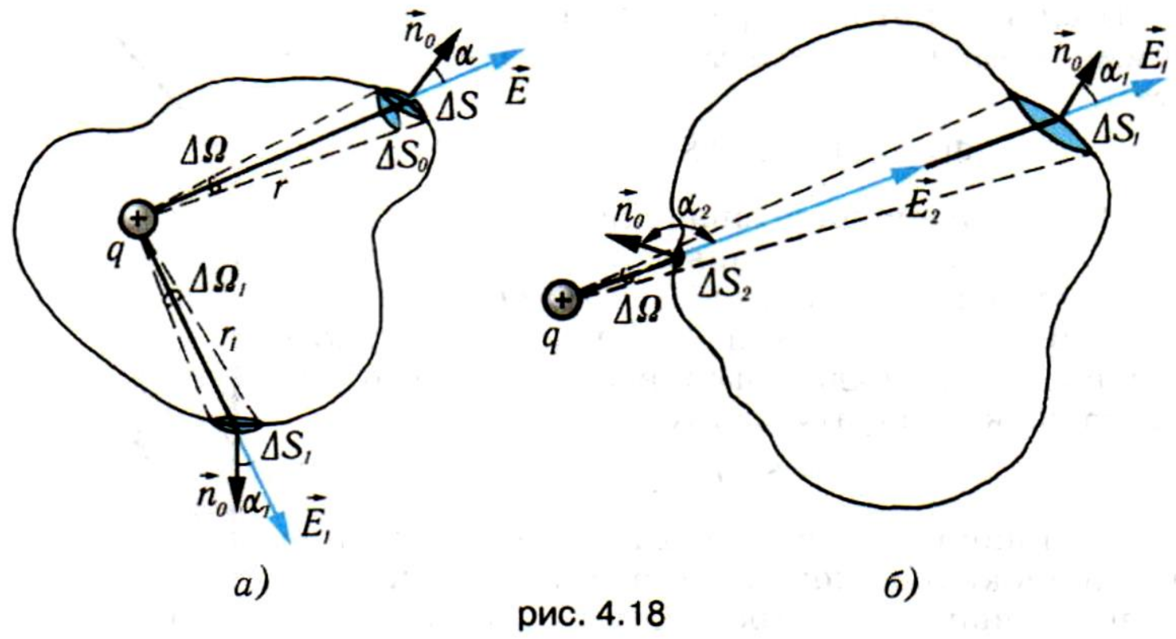

рис. 4.18

зультат не зависит ни от формы поверхности, ни от того, где внутри поверхности расположен заряд.

Осталось рассмотреть случай, когда заряд находится вне замкнутой поверхности. Нетрудно убедиться, что поток в этом случае равен нулю. В самом деле (см. рис. 4.18, *б*), элементарные потоки $\Delta\Phi_1$ и $\Delta\Phi_2$ через площадки ΔS_1 и ΔS_2 по модулю равны, ибо они вписаны в один и тот же телесный угол $\Delta\Omega$ (см. 41.4). Однако знаки этих потоков противоположны, так как угол α_1 острый и $\cos\alpha_1 > 0$, а угол α_2 тупой и $\cos\alpha_2 < 0$.

Итак, сумма этих двух элементарных потоков равна нулю. То же будет справедливо и для всех других участков замкнутой поверхности. Следовательно, если заряд расположен вне замкнутой поверхности, то поток вектора напряженности от этого источника равен нулю.

Если же внутри поверхности расположен не один точечный заряд, а их совокупность или если заряд распределен по некоторой поверхности или в некотором объеме, то выражение (41.5) легко обобщается (на основе принципа суперпозиции; см. с. 20 и 209):

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{\text{внутр}}. \tag{41.6}$$

Это и есть *теорема Гаусса*: поток вектора напряженности через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную.

Используя теорему Гаусса, можно вычислить напряженность электрического поля вокруг заряженного тела при условии наличия какой-либо симметрии, например симметрии относительно центра, плоскости или оси.

Напряженность поля заряженной плоскости. Применим теорему Гаусса для определения напряженности электрического поля заряженной плоскости. Если плоскость бесконечна и заряжена равномерно, т. е. *поверхностная плотность заряда* $\sigma = Q/S$ одинакова в любом ее месте, то линии напряженности электрического поля в любой точке перпендикулярны этой плоскости. Такое же направление они сохраняют и на любом расстоянии от плоскости, т. е. поле заряженной плоскости однородное.

Для нахождения напряженности электрического поля заряженной плоскости мысленно выделим в пространстве цилиндр, ось которого перпендикулярна заряженной плоскости, а основания параллельны ей и одно из оснований проходит через интересующую нас точку поля. Цилиндр вырезает из заряженной плоскости участок площадью S, и такую же площадь имеют основания цилиндра, расположенные по разные стороны от плоскости (рис. 4.19).

Осталось рассмотреть случай, когда заряд находится вне замкнутой поверхности. Нетрудно убедиться, что поток в этом случае равен нулю. В самом деле (см. рис. 4.18, *б*), элементарные потоки $\Delta\Phi_1$ и $\Delta\Phi_2$ через площадки ΔS_1 и ΔS_2 по модулю равны, ибо они вписаны в один и тот же телесный угол $\Delta\Omega$ (см. 41.4). Однако знаки этих потоков противоположны, так как угол α_1 острый и $\cos\alpha_1 > 0$, а угол α_2 тупой и $\cos\alpha_2 < 0$.

Итак, сумма этих двух элементарных потоков равна нулю. То же будет справедливо и для всех других участков замкнутой поверхности. Следовательно, если заряд расположен вне замкнутой поверхности, то поток вектора напряженности от этого источника равен нулю.

Если же внутри поверхности расположен не один точечный заряд, а их совокупность или если заряд распределен по некоторой поверхности или в некотором объеме, то выражение (41.5) легко обобщается (на основе принципа суперпозиции; см. с. 20 и 209):

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{\text{внутр}}. \tag{41.6}$$

Это и есть *теорема Гаусса*: поток вектора напряженности через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную.

Используя теорему Гаусса, можно вычислить напряженность электрического поля вокруг заряженного тела при условии наличия какой-либо симметрии, например симметрии относительно центра, плоскости или оси.

Напряженность поля заряженной плоскости. Применим теорему Гаусса для определения напряженности электрического поля заряженной плоскости. Если плоскость бесконечна и заряжена равномерно, т. е. *поверхностная плотность заряда* $\sigma = Q/S$ одинакова в любом ее месте, то линии напряженности электрического поля в любой точке перпендикулярны этой плоскости. Такое же направление они сохраняют и на любом расстоянии от плоскости, т. е. поле заряженной плоскости однородное.

Для нахождения напряженности электрического поля заряженной плоскости мысленно выделим в пространстве цилиндр, ось которого перпендикулярна заряженной плоскости, а основания параллельны ей и одно из оснований проходит через интересующую нас точку поля. Цилиндр вырезает из заряженной плоскости участок площадью S, и такую же площадь имеют основания цилиндра, расположенные по разные стороны от плоскости (рис. 4.19).

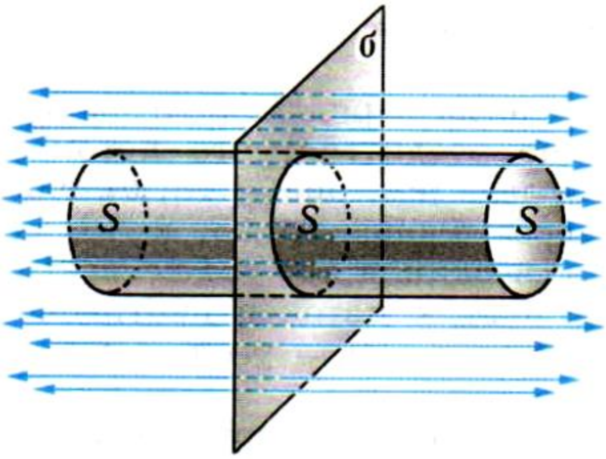

рис. 4.19

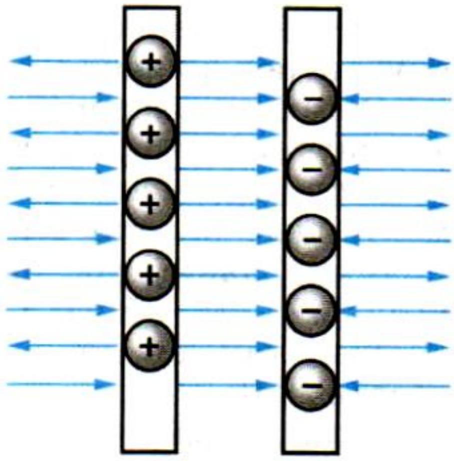

рис. 4.20

Согласно теореме Гаусса поток Ф вектора напряженности электрического поля через поверхность цилиндра связан с электрическим зарядом внутри цилиндра выражением

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}.$$

С другой стороны, так как линии напряженности пересекают лишь основания цилиндра, поток вектора напряженности можно выразить через напряженность электрического поля у обоих оснований цилиндра:

$$\Phi = 2ES.$$

В самом деле, поток через боковую поверхность цилиндра (см. рис. 4.19), согласно выражению (41.2), равен нулю, поскольку $\alpha = 90°$ и $\cos\alpha = 0$.

Из двух выражений для потока вектора напряженности получим

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (41.7)$$

Напряженность электрического поля между разноименно заряженными пластинами. Если размеры пластин значительно превосходят расстояние между ними, то электрическое поле каждой из пластин можно считать близким к полю бесконечной равномерно заряженной плоскости. Так как линии напряженности электрического поля разноименно заряженных пластин между ними направлены в одну сторону (рис. 4.20), то напряженность поля между пластинами равна:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (41.8)$$

Так как

$$\sigma = \frac{Q}{S},$$

где Q — заряд одной пластины; S — ее площадь, то

$$E = \frac{Q}{S\varepsilon_0}. \tag{41.9}$$

Во внешнем пространстве линии напряженности электрического поля разноименно заряженных пластин имеют противоположные направления, поэтому вне этих пластин результирующая напряженность электрического поля практически равна нулю (см. рис. 4.20).

Выражения (41.7) и (41.9) справедливы для больших заряженных пластин, когда напряженность определяется в точке, расположенной далеко от их краев.

Примеры решения задач

Задача 1. Используя теорему Гаусса, найдите зависимость напряженности электрического поля равномерно заряженной тонкой проволоки бесконечной длины от расстояния r до оси проволоки.

Решение. Выделим участок проволоки конечной длины l. Если линейная плотность заряда на проволоке $\tau = q/l$, то заряд выделенного участка равен: $q = \tau l$.

Из соображений симметрии электрическое поле проволоки изобразим линиями напряженности, расходящимися перпендикулярно поверхности проволоки (рис. 4.21).

Окружим этот участок цилиндрической поверхностью радиусом r таким образом, чтобы ось цилиндра совпадала с осью проволоки (см. рис. 4.21). При этом весь поток вектора напряженности будет выходить через боковую поверхность цилиндра, площадь которой $S = 2\pi rl$, так как поток через оба основания цилиндра равен нулю. В этом случае из выражений (41.2) и (41.5) следует: $\Phi = E2\pi rl = \frac{\tau l}{\varepsilon_0}$, откуда

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

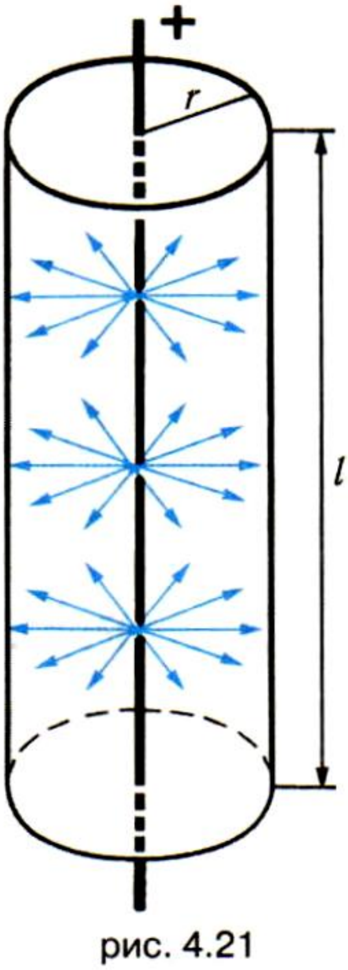

рис. 4.21

Анализ этой формулы показывает, что напряженность электрического поля тонкой, равномерно заряженной, бесконечно длинной и прямой проволоки обратно пропорциональна расстоянию от нее.

Задача 2. Используя теорему Гаусса, определите зависимость напряженности электростатического поля равномерно заряженной сферической поверхности радиусом R от расстояния r до центра сферы. Заряд на сфере равен q.

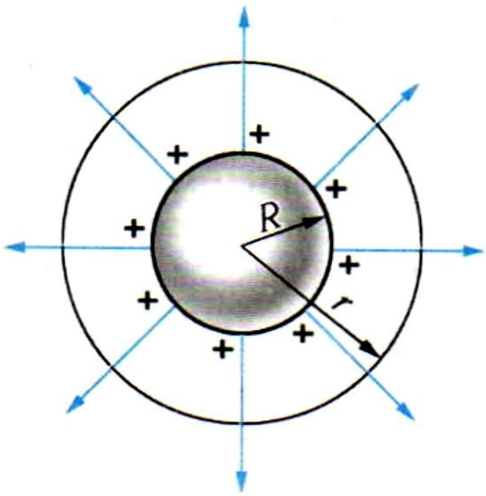

рис. 4.22

Решение. Линии напряженности электрического поля, создаваемого сферой, расходятся радиально. Окружим заряженную сферу сферической поверхностью радиусом $r > R$ (рис. 4.22). Поток вектора напряженности через сферическую поверхность равен:

$$\Phi = 4\pi r^2 E.$$

На основании теоремы Гаусса получим $4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$, откуда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Анализ этой формулы показывает, что электростатическое поле вне равномерно заряженной сферы не отличается от поля точечного заряда, если заряд сферы поместить в ее центре.

Можно доказать, что напряженность электрического поля в любой точке внутри равномерно заряженной сферы равна нулю.