Попова Татьяна Григорьевна
ГБОУ «Средняя общеобазовательная школа №644»
Приморский район г. Санкт-Петербург

# СИСТЕМА ЗАДАЧ, НАПРАВЛЕННАЯ НА РАЗВИТИЕ КОМБИНАТОРНО-ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ

## *Математика. 10–11 класс*

*Учебно-методическое пособие*

**2018 г.**

# ВВЕДЕНИЕ

Система задач используется в процессе работы с учащимися общеобразовательных школ в качестве профильной подготовки по математике, направлена на развитие комбинаторно-логического мышления старшеклассников. Хотя вопросам формирования мыслительной деятельности ученика уделяется достаточно большое внимание, тем не менее, необходимо отметить крайне низкое усвоение способов комбинаторно-логических рассуждений, как в рамках школьной, так и социальной среды.

Поэтому одной из важнейших задач образования остается задача развития мышления учащихся, в котором одной из главных составляющих является комбинаторно-логическое мышление.

Умение решать задачи, разрабатывать стратегию их решения, выдвигать и доказывать гипотезы, прогнозировать результаты своей деятельности, анализировать и находить рациональные способы решения задачи путем оптимизации, различных вариантов перебора с использованием логических операций позволяют судить об уровне развития комбинаторно-логического мышления школьников.

Необходимость поиска новых эффективных средств развития комбинаторно-логического мышления школьников обусловлена его значимостью для дальнейшей самореализации личности в современном обществе. Умение логически рассуждать, вариативно мыслить является показателем общей культуры мышления человека.

Под *комбинаторно-логическим мышлением будем понимать мышление, реализуемое посредством мыслительных операций, направленного на выделение конечных вариантов рассматриваемых явлений и понятий, дальнейшего процесса преобразования числа выделенных выборов в зависимости от субъектного опыта ученика.*

Чтобы ***развивать комбинаторно-логический стиль мышления у старшеклассников необходимо*** чтобы:

– учащиеся умели находить как можно больше вариантов подхода к одной и той же проблеме, а также могли выбрать наиболее оптимальный, исходя из поставленных целей и задач;

– учащиеся умели рассматривать собственные действия и действия других с различных точек зрения, развивая тем самым критическую и рефлексивную компоненты;

– учащиеся умели, применяя ряд мыслительных операций, переформулировать задачу, подходить к ее решению и оформлению решения с различных позиций;

– учащиеся смогли осуществить выбор способа саморазвития, выстраивания своей профессиональной карьеры.

В пособии представлены некоторые виды задач, описаны приемы работы над задачей, направленные на развитие комбинаторно-логического мышления старшеклассников.

## Педагогические условия реализации системы задач

*Основные положения*

1. Одна из важнейших целей обучения состоит в осознании учителем и учащимися значимости формирования комбинаторно-логического мышления. В связи с этим работа на занятиях проводится педагогом в двух направлениях: изучение непосредственного материала, предусмотренного программой и рассмотрение механизмов осуществления логических операций, комбинаторных, логических и общенаучных методов.
2. Содержание обучения также направлено на осуществление логических операций, комбинаторных, логических и общенаучных методов.
3. Предпочтение при развитии комбинаторно-логического мышления отдаётся технологизации процесса обучения и специально разработанной системе задач, способствующих осуществлению логических операций, комбинаторных, логических и общенаучных методов; при работе с задачами особое значение отводится методу моделирования, элементу метода Д. Пойа (Смысл заключается в том, что перед тем, как рассматривать трудную задачу, мы рассмотрим более легкую аналогичную задачу). После чего более легкую задачу будем использовать как модель при решении более сложной задачи, т. е. «при решении более трудной задачи мы будем следовать образцу решения более легкой задачи».

Рассмотрим систему работы учителя по формированию у учащихся умений во взаимосвязи с мотивами учебных действий, предложенную В. А. Кулько и Т. Д. Цехмистровой [15]:

1) «определить уровни развития у учащихся умений учиться и мотивов учебных действий;

2) осуществить поэлементный анализ содержания учебного материала урока, выделив понятия, правила, законы, теории и прикладные знания, а также основные межпредметные и специфичные для данного предмета умения; подобрать дополнительный учебный материал (при необходимости); наметить вид познавательной деятельности (репродуктивная, частично-поисковая, поисковая), в которой будет работать каждый из выделенных элементов учебного материала;

3) сформулировать цели урока (обучающую, развивающую, воспитывающую, познавательную), в том числе по формированию у учащихся умений учиться, самообразовательных умений;

4) подобрать методы и организационные формы обучения, методы воздействия классного коллектива и учителя на учащихся, ИТ;

5) оформить разработанный проект обучения в виде поурочного плана или конспекта урока;

6) реализовать разработанный план;

7) проанализировать ход процесса обучения и достижение запланированных целей;

8) скорректировать обучение в зависимости от его промежуточных и конечных результатов».

*Подготовительная работа учителя к уроку*

При подготовке к уроку учителю необходимо пройти ряд этапов:

- постановка и определение цели, задач и конечных результатов (как отдельного урока, так и темы, раздела и элективного курса в целом);
- определение исходного состояния знаний, умений и навыков учащихся (на основе вводного тестирования с использованием методики нарастающей сложности);
- моделирование пути решения новых учебных и воспитательных задач на основе исходных данных;
- установление логико-дидактической последовательности предъявления нового содержания учащимся;
- разделение содержания деятельности на составные части: деятельность учителя, деятельность учащихся;
- подбор эффективных методов обучения, которые следует применить, чтобы достичь запрограммированных результатов.

Преподаватель должен быть знаком с современным представлением изучаемого материала, новейшими открытиями в области математики и смежных с ней дисциплин, а также с современным школьным оборудованием и мог его эффективно использовать в учебном процессе.

Предлагаемая нами система задач имеет свои принципиальные особенности:

1) при реализации системы упражнений мы не ставим для себя главной целью научить решать именно математические задачи (это возможно только для учащихся с достаточно высоким уровнем математической подготовки);

2) за счёт организации работы в проектном режиме, предусмотрен большой объём самостоятельной работы учащихся с различными источниками информации, в том числе и Интернет-ресурсами; учащиеся формируют в себе навыки публичных презентаций как группового, так и собственного опыта;

3) обучение на высоком уровне своих (ученика) возможностей (по Л. В. Занкову [7]) позволяет каждому ученику развить «зону ближайшего развития», осуществить очередной этап собственного развития;

4) обучение по П. Я. Гальперину[3] включает в себя все четыре уровня действия: физическое, физиологическое, уровень действия субъекта, уровень действия личности;

5) новое содержание по В. В. Давыдову[5] становится «основой развивающего обучения»;

6) использование стадий творческого развития процесса В. П. Зинченко [8]становится одной из ступенек в качественной реализации системы предлагаемых задач.

Процесс реализации системы задач предполагает поэтапное комплексное формирование у старшеклассников всех компонентов комбинаторно-логического мышления.

Для эффективной реализации системы задач, предлагаем следующую ***систему педагогических условий:***

1) специально предложенная типология задач направленных на развитие комбинаторно-логического мышления старшеклассников, реализацию ближней и дальней целей ученика ;
2) обеспечение единства содержательного, мотивационного, критического, корректирующего, контролирующего, рефлексивного, творческого компонентов;
3) развитие комбинаторно-логического мышления старшеклассников органично соединяется с развитием предметных умений, тем самым отражаться на успеваемости по математике;
4) реализация прямого (изучение операций мышления, их классификации и способов применения, основных разделов «комбинаторики») и косвенного путей (умение применять мыслительные операции, комбинаторные, логические, общенаучные методы через предмет «математика») развития комбинаторно-логического мышления старшеклассников;
5) индивидуальная педагогическая поддержка;
6) специальные материалы для оценки и коррекции умений (уровневые тесты);
7) педагогическая деятельность учителя направленная на развитие комбинаторно-логического мышления старшеклассников.

В основу модели формирования комбинаторно-логического мышления учащихся включим ключевые моменты модели индивидуальной педагогической поддержки Е. В. Бондаревской [16]. В ней представлены две группы средств обеспечивающих: общую педагогическую поддержку; индивидуально-личностную поддержку.

Рассмотрим каждую из групп с точки зрения целей и задач нашего исследования.

*Педагогическая поддержка всей группы* учащихся осуществляется за счет:

- эмоционального настроя. Личностно-деятельностный подход, согласно которому в преподавании любого учебного предмета предполагается обучение ученика как личности через соответствующую организацию его учебной деятельности и педагогического общения является одним из основных побудителей познавательного интереса;
- субъект-субъектных отношений;
- использования инновационных технологий, при реализации которых создаются ситуации: взаимообучения, диалогичности общения, позитивной оценки достижений.

*Индивидуально-личностная поддержка* учащихся осуществляется за счет:

- выявления «зоны ближайшего развития», диагностики индивидуального развития, обученности, воспитанности, выявление личных проблем ученика;
- отслеживания процесса развития (вводные, промежуточные и итоговые диагностические данные), так как диагностические данные дают возможность дозировать педагогическую помощь, основанную на индивидуальных особенностях ученика;
- создание ситуации успеха, создание условий для самореализации личности, повышение статуса ученика, значимости его личных вкладов. Особенно эффективным в создании ситуации успеха являются инновационные технологии, работа в группах, парах.

В основу педагогических условий для формирования и развития комбинаторно-логического мышления учащихся включим структурные компоненты образовательного процесса, разработанные на основе компонентов содержания представленных у С. В. Кульневича [16].

- **Мотивационный компонент** ориентирует на создание благоприятной среды выявления личностных качеств учащихся. В основе компонента лежит управление педагогическим влиянием на положительную мотивацию посредством создания условий, востребующих ее деятельность как личностной структуры, опосредованно влияющей на математическую культуру.

*Средства представления*: использование инновационных технологий, активных форм обучения, позволяющих положительно настроить ученика на дальнейшее изучение представленного курса (системы элективных курсов), использование задач активизирующих учебно-познавательную деятельность учащихся.

- **Содержательный компонент** определяет новые или практически новые знания, а также процесс познания как процесс отражения и воспроизведения в человеческом сознании действительности, начинающейся с ощущений и восприятий, с помощью которых познаются единичные предметы и их свойства, которые доступны чувственному восприятию.

*Средства представления:* специальная типология задач, направленная на развитие комбинаторно-логического мышления старшеклассников.

- **Корректирующий компонент** ориентирует на создание ситуаций, где возможно осуществление осмысления достигнутого уровня развития самим учеником и его учителем. Главная цель корректирующего компонента: корректировка содержания изучаемого материала в зависимости от «зоны ближайшего развития» каждого ученика и корректировку самой «зоны развития».

*Средства представления*: использование технологий самооценки и самоконтроля, уровневой дифференциации, включение заданий, позволяющих корректировать ученикам собственные знания.

- **Контролирующий компонент** содержит оценочный материал и условия для возможности корректировки содержательной линии, для осуществления качественного перехода на новый виток развития.

*Средства представления.* Контролирующий компонент включает в себя разработанную нами систему входных, промежуточных и итоговых тестов.

- **Рефлексивный компонент.** Рефлексивный компонент даёт возможность каждому старшекласснику перейти на новый виток «собственного» развития. Рефлексивный компонент содержания элективных курсов направлен на формирование установки осознания сущностей и смыслов явлений, составляющих предмет изучения, соотнесение изучаемого материала с собственными размышлениями, сомнениями по данному вопросу.

*Средства представления.* Рефлексивный компонент ориентирует на создание ситуации, когда учебный материал востребует умение осмысливать явления при помощи изучения и сравнения собственных размышлений, сомнений. Наиболее эффективно рефлексивный компонент при работе с комбинаторными задачами практической направленности, а также на вводных, промежуточных и итоговых этапах фиксации и коррекции знаний, на завершающих этапах применения инновационных технологий.

**Критический компонент** определяет содержание как основу для осмысления любого факта на предмет его соответствия или несоответствия поставленным целям и задачам, современным ценностям и т. д., ориентирует на развитие сильной позиции критичности.

*Критический компонент* содержание материала; незавершенность, открытость знаний (происходит в основном на этапе работы учащихся над проектами по изучению нового материала, а также при выстраивании вариантов различных моделей, связанных с известными методами решения задач и выработкой новых моделей); предоставление возможностей для дополнения логики познания ассоциативными и интуитивными открытиями (при соотнесении новых знаний со старыми, при выборе рациональных путей решения задачи).

- **Творческий компонент** составляет основу для конструирования собственных отношений к изучаемому событию, содержит материал, требующий экспертной оценки и условия для перевода обучаемых в позицию экспертов.

*Творческий компонент* рассматривается средствами перехода на стороннюю позицию, позволяющей ориентироваться не только на результат, но и на процесс приобретения знаний посредством специально организованного проживания и переживания изучаемого материала (например, инновационных технологий); разработкой учащимися задач, а также их решения; переходом некоторых учащихся на этапе коррекции и рефлексии собственных знаний на исследовательский уровень развития.

## Методические рекомендации

### I. *Вводное тестирование*

В современной школе рассматриваются несколько параметров определения уровня достижений учащихся:

1) оценка стандартов образования по различным предметам;
2) предметные умения и навыки;
3) надпредметные умения и навыки;
4) уровень интеллектуального развития;
5) творческая, исследовательская активность (участие в олимпиадах, конкурсах, конференциях и т. д.);
6) уровень сформированности ключевых компетенций (информационной, социальной, коммуникативной и т. д.) или каждой из них в отдельности;
7) уровень личных достижений (в школе, вне школы) и т. д.

Решая задачу развития комбинаторно-логического мышления старшеклассников, выделим *операционные составляющие ключевых действий*:

- выделять существенные признаки и исключать несущественные;
- строить модели ранее изученных объектов, явлений, а также на основе новых знаний;
- переходить от одного вида модели к другой;
- переформулировать условие задачи с целью осуществления качественного анализа и синтеза, лучшего понимания условия задачи;
- находить как можно больше вариантов решения задачи;
- использовать межпредметные связи при решении задач;
- самостоятельно разрабатывать задач и осуществлять их решение;
- осуществлять выбор оригинальных, оптимальных способов решения задачи из числа найденных;
- переходить от частной задачи к задаче с большим числом элементов, операций, рассматриваемых явлений или к обобщенной;
- переходить к мыслительным операциям после решения задачи с целью осуществить сравнение, классификацию, аналогию и т. д. с уже известными учащимся моделями решения задачи.

Прокомментируем задания *вводного теста* для определения уровня развития комбинаторно-логического мышления.

**Задание № 1.** *Числовой ряд*

Продолжи числовой ряд

1. 5, 6, 7, …

Нулевой уровень присваивается за решение, которое «лежит на поверхности» для ученика 10–11 классов, даже очень низким уровнем развития.

2. 8, 14, 20, …

Первый уровень. Задача также не вызывает сложности в решении у большинства учащихся, но требует применение дополнительных знаний, например, «степени». От учащихся требуются умения проводить несложные аналогии.

3. 2, 4, 16, …

Второй уровень. Задача также требует знания «степени». Весь ход рассуждений строится с учетом номера расположения числа «2».Ученику необходимо осуществить стратегию решения (по В. А. Гусеву[4]), провести несложный анализ и на основе его выйти на обобщенную идею.

4. 2, 3, 5, 8, …

Третий уровень. Задача требует проведения анализа и ответа на вопрос: «почему на третьем месте ряда стоит число «5», а на четвертом месте – «8»?» Ученику необходимо провести более глубокий анализ задачи (рассмотреть варианты расчленения элементов ряда на группы), выдвинуть идеи решения задачи и представить их в обобщенном виде.

5. 1, 4, 9, 16, …

Четвертый уровень задачи. При решении необходимо увидеть не только то, что на четных местах стоят четные числа, а на нечетных – нечетные, но и связать с квадратом номера расположения каждого из чисел. Осуществляется синтез через анализ, обобщение идеи.

6. 1, 2, 3, 1, 8, 27, …

Пятый уровень. Чтобы продолжить ряд, необходимо увидеть закономерности в расстановке первого и четвертого чисел, второго и пятого и т. д. Кроме этого, при определении закономерностей используем понятие «куб числа». Необходимо классифицировать элементы ряда, провести сравнение в выявленных закономерностях, обобщить представленные результаты.

**Задание № 2.** *На взвешивание*

Имеется двенадцать монет, одна из которых фальшивая и отличается по весу. Определить фальшивую монету при помощи чашечных весов без гирь.

Для определения уровня сложности задачи, воспользуемся идеей оценки выполнения такого типа задач, представленную у В. А. Гусева [4, С. 345]. В связи тем, что мы рассматриваем при решении каждой задачи шесть уровней, то соответственно усложним оценку выполнения задач на взвешивание.

1. Нулевой уровень. Учащийся взвешивает все монеты, не делает никаких выводов.

2. Первый уровень. Ученик осуществил классификацию монет, по крайней мере, на две группы и осуществил попытку сократить количество взвешиваний.

3. Второй уровень. Ученик осуществляет предварительный анализ количества возможных взвешиваний, тем самым сокращает количество взвешиваний.

4. Третий уровень. Ученик не только осуществляет анализ количества возможных взвешиваний, распределяет монеты на группы и осуществляет сравнительный анализ взвешенных и не взвешенных монет.

5. Четвертый уровень. Ученик правильно определяет минимальное число взвешиваний при помощи проведенных мыслительных операций, но не до конца осуществляет описание логических рассуждений в выборе фальшивой монеты.

6. Пятый уровень. Ученик осуществил до конца все логические рассуждения при решении задачи и смог представить выбор фальшивой монеты наименьшим числом взвешиваний.

**Задание № 3.** *Добавь цифры*

Вместо * в числе 32*5** поставьте такие цифры, чтобы число делилось на 5, 2 и 9.

Чтобы число делилось на 2 и 5, необходимо, чтобы на конце числа стояла цифра «0».

Чтобы число делилось на 9, нужно чтобы сумма цифр делилась на 9. Значит, сумма оставшихся двух зашифрованных цифр может быть равна 8, т. к. сумма уже известных цифр равна 10.

Рассмотрим всевозможные варианты получения данной суммы:

$$8=0+8=1+7=2+6=3+5=4+4=5+3=6+2=7+1=8+0.$$

1. Нулевой уровень. Ученик решил задачу «слепым подбором», смог найти один вариант числа, не объясняя ход своих рассуждений.

2. Первый уровень. Ученик правильно определил последнюю цифру числа и смог обосновать ее значение. Подбор оставшихся цифр осуществляет хаотично, в результате чего смог определить также один вариант числа, как и при нулевом уровне.

3. Второй уровень. Ученик правильно определил последнюю цифру числа и смог обосновать ее значение. Подбор оставшихся цифр осуществляет хаотично, но смог определить большее количество вариантов числа.

4. Третий уровень. Ученик правильно определил последнюю цифру числа и смог обосновать ее значение. Подбор оставшихся цифр осуществляет хаотично, но смог определить практически все варианты числа.

5. Четвертый уровень. Ученик смог дать правильное обоснование выбора цифр на основе признаков делимости на 2, 5 и 9, но не смог представить все варианты перебора.

6. Пятый уровень. Ученик смог дать правильное обоснование выбора цифр на основе признаков делимости на 2, 5 и 9, смог представить все варианты перебора.

**Задание № 4.** *Принцип объединения*

По какому принципу элементы объединены в группы.

Количество групп предлагается ровно пять. Если ученик не смог определить принцип объединения ни одной группы, значит, уровень усвоения такого типа задач присваивается «нулевой». По количеству правильно найденных принципов объединения присваивается уровень усвоения от «первого» до «пятого».

a) ШУБА, МАМА, ЗАМОК, ТОПОЛЬ, ИГЛА (два слога);

b) ДВА, СЕМЬ, ПЯТНАДЦАТЬ, ШЕСТЬ (числа или числительные);

c) ОТРЕЗОК, ПРЯМОУГОЛЬНИК, ТОЧКА, ЦИЛИНДР (геометрические фигуры);

d) ЦИЛИНДР, СФЕРА, КОНУС, ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД (стереометрические фигуры);

e) 8, 27, 64, 125 (кубы чисел).

**Задание № 5.** *Что лишнее?*

Какое слово является лишним. Дайте обоснование.

Количество заданий предлагается ровно пять. Если ученик не смог определить ни одного лишнего слова или не смог дать обоснование, значит, уровень усвоения такого типа задач присваивается «нулевой». По количеству верно найденных лишних слов и представленным объяснениям присваивается уровень усвоения от «первого» до «пятого».

a) РЕКА, ОЗЕРО, МОРЕ, МОСТ, БОЛОТО;
b) ЧИСЛО, СЛОЖЕНИЕ, ДЕЛЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ, УМНОЖЕНИЕ;
c) ОКРУЖНОСТЬ, ТРЕУГОЛЬНИК, ПИРАМИДА, УКАЗКА, КВАДРАТ;
d) КОРЕНЬ, УРАВНЕНИЕ, ЛОГАРИФМ, ПЕРЕМЕННАЯ;
e) МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ, ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД, МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ, МЕТОД АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПРЕБРАЗОВАНИЙ.

**Задание № 6.** *Примени аналогию*

Составь уравнения аналогичные данному (выбирая различные основания для аналогии)

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Варианты составления аналогичных заданий (разработаны на основе идеи описанной А. З. Заком [6, С. 184–186]):

В пунктах 1–6 рассматриваются различные варианты изменения условия задачи.

1) выбраны для аналогии прежние имена, т. е. функция;
2) для аналогии выбран сюжет (вид уравнения);
3) аналогию составляет метод решения уравнения;
4) для аналогии выбрано несколько оснований (пункты 1–3);
5) вместо уравнения рассматриваем, например, выражение (изменяем вопрос);
6) изменяем имена и сюжет задачи, условие задачи.

**Задание № 7.** *Классификация*

Проведи классификацию представленных элементов множества {-4; 7,6; $-\frac{2}{5}$; 9; - 5,9; $2^2$}, выбирая различные основания для классификации.

Уровень присваивается в зависимости от числа найденных оснований для классификаций.

**Задание № 8.** *Сравнение*

Равносильны ли уравнения:

1) $x^4-6x^2+5=0$ и $x^2-6x+5=0$;
2) $x^3-3x=0$ и $t^3-3t=0$;
3) $cos(x+3)=5$ и $\cos x=1{,}5$;
4) $x^4-12x^2+36=0$ и $(y-6)^2=0$;
5) $\frac{x-9}{x^4}=0$ и $x^4(x-9)=0$;
6) $\sqrt{x^2+9}=5$ и $x^2+9=25$.

**Задание № 9.** *Расположи правильно*

Расположите в виде индуктивной логической схемы:

a) теннис, человек, теннисист, российский теннисист, Марат Сафин;
b) число, дробь, обыкновенная дробь, отрицательная обыкновенная дробь;
c) многогранник, пирамида, прямая пирамида, правильная пирамида.
d) Расположи в виде дедуктивной логической схемы:
e) лес, кедр, дерево, хвойное дерево;
f) ломаная, треугольник, замкнутая ломаная;
g) экзамен, последний звонок, вуз, выпускной.

**Задание № 10.** *Анализ и синтез.*

Для разработки данного типа заданий воспользуемся идеей П. М. Эрдниева, Б. П. Эрдниева [26, С. 107]. «Соединение анализа и синтеза» при работе над двойственными заданиями (составление решение составленного). По словам авторов «возрастание количества однообразных упражнений не приводит само по себе к качественному обогащению логических приемов мышления».

На основе предложенного тождества составьте не менее пяти различных видов уравнений (изменяя вид функции) и решите их.

$$9^2-6\cdot 9+5=0.$$

Примерные варианты составленных учащимися уравнений:

1) $x^2-6x+5=0$;
2) $x^4-6x^2+5=0$;
3) $\sqrt{x}-6\sqrt[4]{x}+5=0$;
4) $(x+6)^2-6(x+6)+5=0$;
5) $4^x-6\cdot 2^x+5=0$.

*Вариант оценивания вводного теста*

Сумму набранных уровней делим на количество выполняемых заданий, т. е. на 10. Полученное число баллов эквивалентно переводим в оценку, осуществив при необходимости предварительное округление приближенного результата.

***II.*** Согласно представленным вариантам тестов и уровневых заданий представим ***уровни эффективного развития комбинаторно-логического мышления старшеклассников*** [22].

*Таблица1*

| Уровни | Знания | Умения |
|---|---|---|
| *Низкий (нулевой)* | Практическое отсутствие знаний об общенаучных, логических, комбинаторных методах. Бессистемность предметных знаний по математике, достаточно большое число пробелов предметных знаний. | Ученик умеет решать только задачи «одного шага» (так называемые «в лоб»), либо решает их по интуиции. |
| *Первый* | Большие затруднения в применении методов научного познания. Владеет только простейшими предметными знаниями. | Ученик умеет решать задачи, требующие простейших математических знаний |
| *Первый* | Большие затруднения в применении методов научного познания. Владеет только простейшими предметными знаниями. | Ученик умеет решать задачи, требующие простейших математических знаний |
| *Второй* | Знает общенаучные, логические, комбинаторные методы. На среднем уровне владеет предметными знаниями. | Ученик осуществляет предварительный анализ условия задачи, находит ключевые компоненты для взаимосвязи и дальнейшего ее решения, но не осуществляет до конца ход рассуждений (основная причина: знает методы познания, но не всегда может их применить. То же самое происходит и с предметными знаниями). |

| | | |
|---|---|---|
| *Третий* | Знает общенаучные, логические, комбинаторные методы, в несложных ситуациях может их применить.<br>На хорошем уровне владеет предметными, межпредметными знаниями. | Ученик осуществляет не только предварительный анализ, но и осуществляет на основе этого синтез и обобщение, поиск оригинальных способов решения задач, осуществляет переход от частной задачи к задаче с большим числом элементов, операций или к обобщенной. |
| *Четвертый* | Знает общенаучные, логические, комбинаторные методы, может их применить.<br>На высоком уровне владеет предметными, межпредметными знаниями. | Ученик может переходить от одного вида модели к другой, умеет переформулировать условие задачи с целью осуществления качественного анализа и синтеза, лучшего понимания условия задачи; находить как можно больше вариантов решения задачи; использует межпредметные связи; самостоятельно разрабатывает задач и осуществляет их решение. |
| *Пятый* | Знает общенаучные, логические, комбинаторные методы, в большинстве случаев может их применить.<br>На достаточно высоком уровне владеет предметными, межпредметными знаниями. | ученик может переходить от одного вида модели к другой, умеет переформулировать условие задачи с целью осуществления качественного анализа и синтеза, лучшего понимания условия задачи; находить как можно больше вариантов решения задачи; использует межпредметные связи; самостоятельно разрабатывает задачи и осуществляет их решение; строит модели ранее изученных объектов, а также строит модели на основе новых знаний; умеет переходить к мыслительным операциям после решения задачи с целью осуществления сравнения, классификации, аналогии и т. д. с уже известными моделями решения задачи. |

## III. *Итоговое тестирование, подведение итогов*

Рассмотрим один из вариантов *итогового тестирования*

**Задание № 1.** *Числовой ряд*

Продолжи числовой ряд:

1. 3, 12, 48, …
2. 1, 8, 27, …
3. 2, 9, 28,...
4. 1/2, 2/3, 3/4, …
5. 2, 3, 4, 9, 8, 27,…
6. 7, 4, 3, 1, 5/3, -1/2,…

**Задание № 2.** *На взвешивание*

Имеется семнадцать монет, одна из которых фальшивая и отличается по весу. Определить фальшивую монету при помощи чашечных весов без гирь.

**Задание № 3.** *Добавь цифры*

Вместо * в числе 34*7*** поставьте такие цифры, чтобы число делилось на 5, 3 и 4.

**Задание № 4.** *Принцип объединения*

По какому принципу элементы объединены в группы.

a) МОСКВА, РИМ, ОСЛО, ПАРИЖ;
b) ПЯТНАДЦАТЬ, ПЯТЬ, ПЯТЬДЕСЯТ, ПЯТЬСОТ;
c) ОТРЕЗОК, КОНУС, ТОЧКА, ЛОМАНАЯ;
d) ЦИЛИНДР, ШАР, КОНУС, СФЕРА;
e) 16, 25, 36, 49.

**Задание № 5.** *Что лишнее?*

a) рак, стол, утка, метка;
b) мост, рука, стол, стиль;
c) рампа, смелый, стальной, лом;
d) схема, граф, уравнение, алгоритм;
e) производная, дифференциал, касательная, круг;
f) сантиметр, метр, гектар, век.

**Задание № 6.** *Примени аналогию*

Составь задачи аналогичные данному (выбирая различные основания для аналогии)

$$x^6 - 8x^3 + 5 = 0$$

**Задание № 7.** *Классификация*

Проведи классификацию представленных элементов множества $\{ x, \sqrt{2x+5}, 2x+5, tg3x, x^2+5, x^5, 2x^4-3x^2+8 \}$, выбирая различные основания для классификации.

**Задание № 8.** *Сравнение*

Равносильны ли уравнения:

1) $\sqrt{x^2-5x}(x-2)/x=0$ и $x^2-7x+10=0$;

2) $y^3+2y=0$ и $\frac{(x^3+2x)x^3}{x+5}=0$;

3) $(x+5)^4=4$ и $x=1{,}5$;

4) $x^4-6x^2+9=0$ и $(y^2-3)^2=0$;

5) $\frac{2x-1{,}5}{x^2}=0$ и $x^2(2x-1{,}5)=0$;

6) $\sqrt[3]{x^2-4}=2$ и $x^2-8=4$.

**Задание № 9.** *Расположи правильно*

Расположите в виде индуктивной логической схемы:

a) переменная, функция, непрерывная функция;
b) число, натуральное число, рациональное число, комплексное число;
c) точка, отрезок, прямая, ломаная.

Расположи в виде дедуктивной логической схемы:

a) учебный год, процесс обучения, урок, учебная четверть;
b) круг, шар, шаровой сегмент;
c) экзамен, ЕГЭ, образование.

**Задание № 10.** *Анализ и синтез.*

На основе предложенного тождества составьте не менее пяти различных видов уравнений (изменяя вид функции) и решите их.

$$\frac{\sqrt{x^2-3}}{x^3-1}=0.$$

## *IV. Вариант оценивания вводного и итогового тестов*

Оцениваем каждое задание по шести уровням рассмотренными в водном тесте (от «нулевого» до «пятого») и далее осуществляем процедуру перевода суммы набранных уровней в традиционную оценку.

Как указывает В. М. Лизинский [17, С. 65]: «основным недостатком многих современных школьников является отсутствие видимых, осознаваемых, понимаемых целей и способности пошагово, твердо, упорно проявлять волевые качества для их достижения. Одним из педагогических шагов, позволяющих двигаться в этом направлении, может быть выстраивание системы усложняющих заданий». Нами разработаны варианты заданий с учетом двух вариантов усложнения (нарастания):

1) ученику необходимо предложить как можно больше оснований при выполнении задания, тем самым происходит процесс усложнения (процесс нарастания заключается в том, что чем дальше ученик продвигаемся по решению задания, тем сложнее осуществляется поиск оснований для выполнения этого задания);

2) ученику необходимо правильно выполнить как можно больше подпунктов задания (процесс нарастания заключается в том, что каждый из

представленных подпунктов построен на использовании различных знаний математики, что соответственно снижает степень выполнения решения задачи в полном объеме).

Решение данных диагностических тестов носит не только контролирующий, но и обучающий характер.

Так как темпы развития каждого ребенка индивидуальны, то задача учителя состоит не только в том, чтобы вывести ученика на новый уровень развития, но и побудить его к саморазвитию, т. е. вывести на постоянный процесс развития.

## СИСТЕМА ЗАДАЧ, НАПРАВЛЕННАЯ НА РАЗВИТИЕ КОМБИНАТОРНО-ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ

### Текстовые задачи

*Алгоритм решения текстовых задач*

Шаг 1. Вид задачи: на работу, на движение, проценты, смеси или сплавы, логические, комбинаторные, геометрические, ….

Шаг 2. Соотносим заданную задачу с видами задач

Шаг 3. Определяем ключевые составные заданного типа задачи

Шаг 4. Оформление: краткая запись, пояснение, таблица, схема

Шаг 5. Способы решения: арифметический (алгебраический), с помощью уравнения, с помощью системы уравнений, с помощью логических рассуждений и алгебраический действий

Шаг 6. Оформляем задачу

Шаг 7. Ход решения

Шаг 8. Реши данную задачу различными способами.

Решим текстовую задачу по представленному алгоритму.

Задача № 1

На двух копировальных машинах, работающих одновременно, можно сделать копию пакета документов за 10 минут. За какое время можно выполнить эту работу на каждой машине в отдельности, если известно, что на первой машине её можно сделать на 15 минут быстрее, чем на второй?

Решение:

Шаг 1-2. Данная задача относится к типу задач на работу

Шаг 3.

Ключевые составные заданного типа задачи: производительность (норма), время работы, объем выполненной работы.

Шаг 4.

Оформим краткую запись в виде таблицы (предварительно соотнеся единицы заданных величин) (Рис. 1)

| | Производительность | Время работы | Объем продукции |
|---|---|---|---|
| 1 машина | | На 15 мин. быстрее, чем | |
| 2 машина | | | |
| Совместная работа | | 10 мин. | |

Рис. 1

Шаг 5.

Так как в задаче дана всего одна фактическая величина (10 мин. -период совместной  работы 2-х машин) и одна сравнительная величина (выполнение работы на первой машине на  15  минут быстрее, чем на второй), поэтому данную задачу следует решать либо с помощью уравнения.

Для этого, например, за неизвестную величину следует обозначить время работы первой ли второй машины. Но тогда нужно будет объем производимой продукции обозначить за 1 (Рис. 2).

| | Производительность | Время работы | Объем продукции |
|---|---|---|---|
| 1 машина | | х-15 мин. | 1 |
| 2 машина | | х | 1 |
| Совместная деятельность | | 10 мин. | 1 |

Рис. 2

*Замечание.* Заполняем до конца таблицу, зная, что все три величины в строке между собой связаны. То есть, по объему продукции  времени работы можно найти норму (производительность) (Рис.3).

| | Производительность | Время работы | Объем продукции |
|---|---|---|---|
| 1 машина | 1/(х-15) | х-15 мин. | 1 |
| 2 машина | 1/х | х | 1 |
| Совместная деятельность | 1/10 | 10 мин. | 1 |

Рис. 3

Шаг 6.

Оформляем  уравнение к задаче, исходя из того, что производительность совместной деятельности равна сумме производительностей каждой машины.

$$\frac{1}{x-15}+\frac{1}{x}=\frac{1}{10}$$

Шаг 7. Решаем полученное уравнение.

*Примечание.* Если бы данную задачу решали бы с помощью составления системы уравнений, то за вторую неизвестную величину необходимо было бы обозначить объем продукции.

Шаг 8.

Решаем данную задачу еще тремя способами:

1) обозначая за «x»- время работы первой машины;
2) решая задачу с помощью системы уравнений (обозначив за вторую неизвестную-объем продукции);
3) решая задачу с помощью системы уравнений (обозначив за первую и вторую неизвестные - производительность первой и второй машин соответственно).

**Область определения функции (выражения)**

Заметим, что в школьном курсе математике рассматриваются только четыре условия, на основании которых появляются ограничения на область определения. В школьных учебниках и задачах ЕГЭ встречаются либо задания в том виде, как они представлены в таблице, либо задания составлены из расчета комбинации некоторых ниже перечисленных условий.

*Таблица 2*

| Нельзя делить на ноль | Основание степени при произвольном действительном показателе положительно, при положительном показателе-неотрицательно | Подкоренное выражение корня четной степени не должно быть отрицательно | Под знаком логарифма не должно быть неположительног о выражения. В основании логарифма не должно быть неположительног о выражения и единицы | Аргумент обратных тригонометричес ких функций arcsin x, accos x не превышает по модулю единицу |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$ | $x^{\alpha}, x>0, если\, \alpha -$ *любое действиельное*; $x\geq 0, если\, \alpha>0$ | $\sqrt[n]{f(x)},$ $n-$*четное,* $f(x)\geq 0$ | $\log_{g(x)} f(x),$ $g(x)>0, g(x)\neq 1,$ $f(x)>0$ | $\arcsin f(x),$ $\arccos f(x),$ $\lvert f(x)\rvert\leq 1$ |

*Алгоритм решения задач на нахождения области определения функции (выражения)*

Шаг 1. Определяем, какое из представленных ограничений (таблица 2) представлено в задании
Шаг 2. Выясняем, сколько ограничений представлено в задании
Шаг 3. Вычисляем область определения функции (выражения) из системы неравенств найденных ограничений
Шаг 4. Составление комбинированных задач и представленных видов выражений и функций
Шаг 5. Разбор решений составленных учащимися задач
Решим задачу по представленному алгоритму.
Шаг 6. (творческий компонент)
Провести анализ основных учебных изданий для 10-11 классов и заданий для подготовки к ЕГЭ. Цель: поиск других видов формулировок задания, целью которых является поиск области определения.

<u>Задача № 2</u>

Найти область определения выражения $\dfrac{\log_{2x}(5x^2-6)}{\sqrt{6x^2-54}}$

<u>Решение:</u>
Шаг 1-2.
Из таблицы 2 определяем, что в нашем задании представлено три ограничения:

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, ; $g(x) \neq 0$ | $\sqrt[n]{f(x)}$, $n-$*четное*, ; $f(x) \geq 0$ | $\log_{g(x)} f(x)$, $g(x) > 0, g(x) \neq 1$, $f(x) > 0$ |

Шаг 3.
Составляем систему неравенств найденных ограничений

$$\begin{cases} 2x > 0; \\ 2x \neq 1; \\ 5x^2 - 6 > 0; \\ 6x^2 - 54 \neq 0; \\ 6x^2 - 54 \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Обращаем внимание, что четвертое и пятое неравенства системы (1) можно заменить одним строгим неравенством.

$$\begin{cases} 2x > 0; \\ 2x \neq 1; \\ 5x^2 - 6 > 0; \\ 6x^2 - 54 > 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Решив каждое неравенство системы (2) и выбрав общую часть, получим ответ задачи.

Шаг 4.

Учащиеся придумывают задачи на нахождения области определения выражения, комбинируя представленные в системе (1) или (2) неравенства, а также комбинируя представленные в задаче функции: $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\log_{g(x)} f(x)$,$\sqrt[n]{f(x)}$.

Примеры составленных заданий:

a) $\sqrt{5x^2-6}$

b) $\frac{5x^2-54}{\log_{(5x^2-6)} 2x}$

c) $\log_{(6x^2-54)}(5x^2-6)$

d) $\frac{\sqrt{5x^2-6}}{2x}$ и т.д.

Шаг 5.

Все варианты составленных задач распределяются между учащимися (группами учащихся), прорешиваются, обсуждаются решения.

## Решение основных видов уравнений

Для начала необходимо будет вспомнить, какие основные виды уравнений изучаются в школьном курсе. Самый оптимальный вариант определить перечень видов уравнений самим учащимся через работу в парах, группах или организацию на уроке мини-проекта по теме «Основные виды уравнений и способы их решения» (Рис.4)

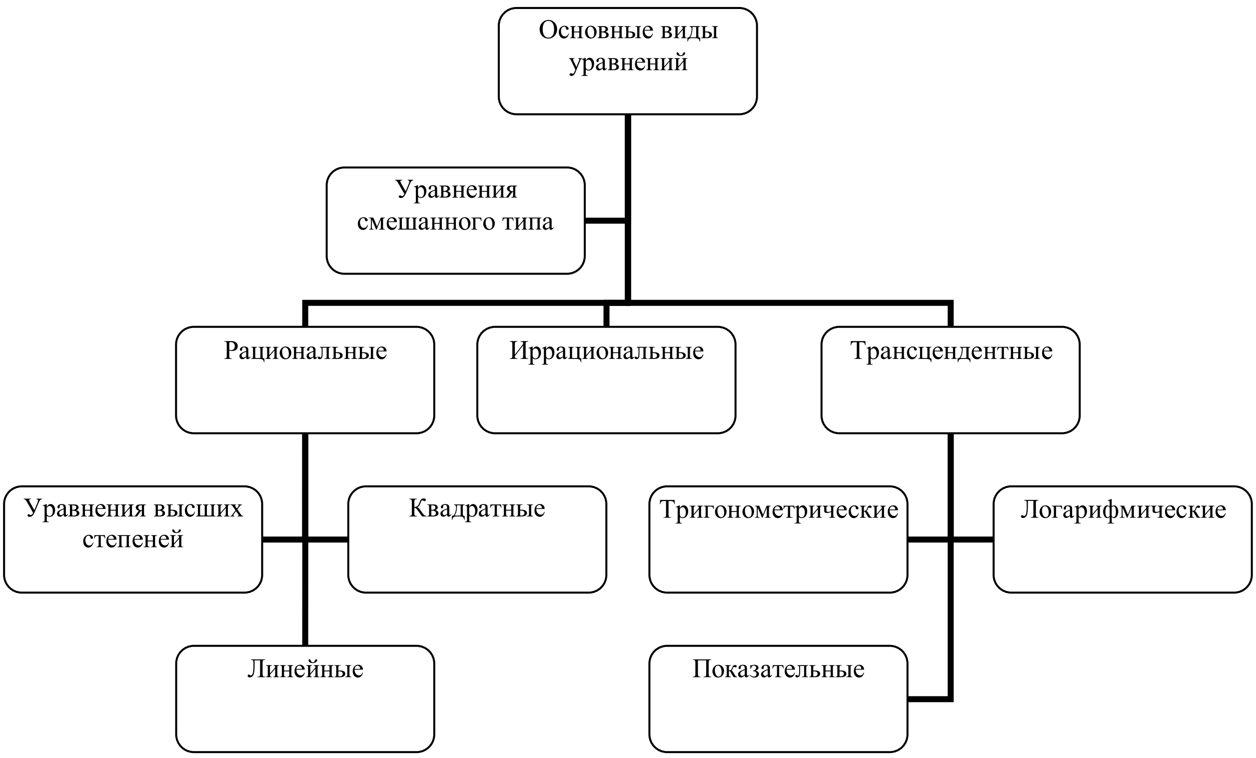


Рис. 4

Далее рассматриваем основные методы решения уравнений:

1. метод замены переменной, в том числе приведением к квадратному;

2. метод разложения на множители, в том числе группировкой;
3. делением каждого слагаемого в уравнения на одну из входящих него функций;
4. преобразование уравнения при помощи основных формул для входящего вида функций, в том числе и формул сокращенного умножения;
5. графический метод;
6. специфические методы (характерные только для данного вида уравнения).

*Замечание.* Сразу же оговариваем, что смешанного типа уравнение ни одним из указанных выше методов не решается.

*Алгоритм решения основных видов уравнений*

Шаг 1. Определить вид уравнения. Ставим перед собой **главную цель**: привести данное уравнение к простейшему виду или совокупности простейших уравнений

Шаг 2. Провести анализ использования основных методов решения уравнений. Задача: найти свободный конец «нити Ариадны», благодаря чему будет сворачиваться клубок, т.е. решаться уравнение

Шаг 3. При каждой затруднительной ситуации проводим анализ использования при решении основных методов решения уравнения, зная о том, что, как правило, очень редко встречаются уравнения, решаемые от начала до конца одним методом

Шаг 4. Поиск дополнительных путей решения исходного уравнения

Шаг 5. Составление аналогичных уравнений, беря за основу другие виды функций

Решим несколько уравнений по представленному алгоритму

<u>Задача № 3</u>

Решить уравнение $2\sin^2 x - 5\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x = 0$ (1)

<u>Решение:</u>

Шаг 1.

Данное уравнение относится к тригонометрическому виду. Главная цель: привести к простейшему виду sin x=a или cos x=a, или tg x=a.

Шаг 2.

В уравнении (1) не применим метод замены переменной из-за второго слагаемого, содержащего тригонометрические функции первой степени.

Можно попробовать применить метод разложения на множители, предварительно разбив второе слагаемое на два с коэффициентами 2 и 3.

Шаг 3.

Приведем предполагаемые шаги в действие.

$$2\sin^2 x - 3\sin x\cdot\cos x - 2\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x = 0 \qquad (2)$$

Применим способ группировки в уравнении (2)

$$(2\sin^2 x - 2\sin x\cdot\cos x) + (3\cos^2 x - 3\sin x\cdot\cos x) = 0 \qquad (3)$$

Вынесем общие множители за скобки в уравнении (3)

$$2\sin x\cdot(\sin\ \ x - \cdot\cos x) + 3\cos x\cdot(\cos\ \ x - \sin x\cdot) = 0 \qquad (4)$$

Заметив, что выражения в скобках отличаются только знаком, то, изменив знак у второго слагаемого, применим еще раз метод разложения на множители.

$$(\sin x - \cdot \cos x)\cdot(2\sin x - 3\cos x) = 0 \qquad (5)$$

Для каждого множителя уравнения (5), а по сути двух новых уравнений, проведем анализ по применению основных методов.

В уравнении $\sin x - \cos x = 0$ можно обе части разделить на $\sin x$ *или* $\cos x$, так как косинус и синус одновременно не могут быть равны нулю.

В результате получим равносильное уравнение $tgx - 1 = 0$, которое легко приводится к простейшему виду *tg x=1.*

В уравнении $2\sin x - 3\cos x = 0$ применим тот же самый метод, разделив на $\sin x$ *или* $\cos x$, получив простейшее уравнение $tgx = 1{,}5$

Шаг 4. Дополнительные пути решения

Шаг 4.1.- 4.2. Вернувшись к исходному уравнению (1) и проведя вновь анализ по использованию основных методов решения (3-6 методы), выясняем, что в уравнении, изначально можно было обе части поделить на $\sin^2 x$ *или* $\cos^2 x$.

Разделив обе части на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение

$$2tg^2 x - 5tgx + 3 = 0 \qquad (6)$$

Шаг 4.3.

Проведя анализ решения уравнения (6), приходим к выводу, что его можно решить приведением к квадратному. Для это введем замену переменной $tgx = t$

В результате получим квадратное уравнение $2t^2 - 5t + 3 = 0$

Решив его и вернувшись к замене, получим простейшие уравнения $tgx = 1$и $tgx = 1{,}5$

Шаг 5.

Составление учащимися новых видов уравнений, их прорешивание и разбор решений

Представляем некоторые варианты составленных уравнений

a) $2\cos^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 3\sin^2 x = 0$
b) $2\lg^2 x - 5\ln x \cdot \lg x + 3\ln^2 x = 0$
c) $2\cdot 9^x - 5\cdot 3^x \cdot 4^x + 3\cdot 16^x = 0$
d) $2\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x(x-3)} + 3\sqrt{x-3} = 0$ и т.д.

<u>Задача № 4</u>

Решить уравнение $\lg(x-6) - 0{,}5\lg 2 = \lg 3 + \lg\sqrt{x-10}$ (7)

<u>Решение:</u>

Шаг 1.-2. Определяем, что уравнение (7)- логарифмическое. Определяем главную цель: привести уравнение (7) к простейшему виду $\log_a f(x) = b$ или $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, или совокупности нескольких простейших уравнений.

Шаг 3.

Используем в уравнении (7) свойства логарифмов- метод преобразование уравнения при помощи основных формул для входящего вида функций

В результате получим, $\lg(x-6)/\sqrt{2} = \lg 3\sqrt{x-10}$ (8)

Уравнения (7) и (8) сводятся к уравнению $\sqrt{2}(x-6)/ = 3\sqrt{x-10}$ (9)

Проведя анализ уравнения (9), определяем, что оно относится к иррациональным, а следовательно, его будем решать возведя обе части в квадрат (помним, что при этом могут получиться посторонние корни)

$(x-6)^2/2 = 9(x-10)$ или $(x-6)^2 = 18(x-10)$, или $x^2 - 30x + 216 = 0$ (10)

Для проверки полученных значений переменной «х» найдем область определения исходного уравнения (7).

$$\begin{cases} x-6>0; \\ x-10>0. \end{cases}$$

Шаг 4.

Поиск дополнительных путей решения исходного уравнения

Умножая обе части уравнения на 2 и используя свойства логарифмов, имеем

$\lg(x-6)^2 = \lg 18(x-10)$ (11)

Дальнейшие шаги решения уравнения (11) понятны.

Шаг 5.

Составление учащимися новых видов уравнений, разбор их решений

a) $\log_5(x-6) - 0{,}5\log_5 2 = \log_5 3 + \log_5 \sqrt{x-10}$

b) $\lg\sqrt{x-6} - 2\lg 2 = \lg 3 + \lg(x-10)$

c) $\sqrt{x-6} = 3(x-10)$ и т.д.

## Основные приемы поиска решения задач

При обучении школьников решению задач учитель сталкивается с некоторыми проблемами. Многие учащиеся, даже старших классов не умеют анализировать условие трудных задач, осуществлять поиск решения, тем более поиск и оформление нескольких способов решения.

В связи с этим предметом специального усвоения должны стать приемы поиска решения задач.

*Прием решения задач «Математические софизмы»*:

1. изучить содержание задачи, уточнить уровень математических знаний, необходимый для ее разрешения (содержательный компонент);
2. провести поиск скрытой ошибки (с помощью перехода на другие формы записи производимых математических преобразований или рассмотрение тонкостей теоретического обоснования того или иного перехода в математических действиях);
3. обоснование скрытой ошибки (критический компонент);
4. соотнесение задачи, скрытой ошибки с личным опытом (рефлексивный компонент);

5. при необходимости выявить творческий компонент учащихся за счет разработки софизмов на основе разобранных, а также самостоятельное знакомство с другими видами софизмов.

Рассмотрим пошаговую работу над задачей

Задача № 1. Где ошибка?

Рассмотрим очевидное равенство:

$(4 – 4,5)^2 = (5 – 4,5)^2$

Отсюда, извлекая квадратный корень, имеем:

$4 – 4,5 = 5 – 4,5$

Прибавляем к обеим частям этого равенства по 4,5, получаем, что 4 = 5. Где ошибка?

Схема рассуждений и ход решения

Шаг 1. Использование разработанного алгоритма решения

Реализуем шаги, разработанные при разрешении софизма.

Шаг 2. Суть ошибки.

Выявляем, какое правило математики было нарушено.

При извлечении корня квадратного из обеих частей возможного равенства получаем неверный результат. Так как при любом значении *a* справедливо $\sqrt{a^2} = |a|$, то правильным следствием должно быть верное равенство $|4 – 4,5| = |5 – 4,5|$, а из него следует $|-0,5| = |0,5|$, а вовсе не равенство $4 – 4,5 = 5 – 4,5$.

*Замечание*: Работа с парадоксальными выводами ярко оттачивает одно из важных свойств алгебры.

Задача № 2. Где ошибка?

Напишем тождество: 8 : 8 = 6 : 6.

Вынеся из каждой части тождества общие множители за скобки, получаем:

8 * (1 : 1) = 6 * (1 : 1) или $(2^3)$ * (1 : 1) = 6 * (1 : 1).

Так как 1 : 1 = 1, то $2^3 = 6$. Где ошибка?

Шаг 1.Последовательная оценка.

Рассматриваем последовательно все проведенные действия.

Шаг 2. Выбор неверного шага.

Из всех арифметических действий выбираем наиболее вероятные на ошибку.

Шаг 3. Анализ наиболее вероятных неверных шагов.

Согласно выбранным действиям наиболее вероятных на содержание ошибки проводим их анализ. Основанием для анализа выбираем проведение аналогичных преобразований, но в другой форме записи.

Ответ: Ошибка сделана при вынесении общих множителей: 8 - из левой части; 6 - из правой части.

*Прием решения задач «Последовательности и ряды»*:

1. изучить содержание задачи (содержательный компонент);
2. выявить закономерности или основу для классификации элементов ряда или последовательности (использование метода сравнения: на сколько…, во сколько... и т.д.;
3. переход к более простой задаче, объясняющей принцип построения изначальной (при условии, что не был найден путь к решению задачи);

4. поиск новых оснований для классификации (при условии, что если этого не смогли сделать на втором шаге алгоритма);

5. оформление решения задачи;

6. выявление творческого компонента учащихся за счет разработки аналогичных заданий;

7. соотнесение задачи с личным опытом (рефлексивный компонент);

8. соотнесение условия задачи с ближней и дальней целью ученика (критический компонент).

Задача № 3. Продолжите ряд 77, 49, 36, 18...?

Схема рассуждений и ход решения

Шаг 1. Поиск закономерностей (на, во).

Попытка определения закономерности в расстановке чисел: (на сколько, во сколько больше или меньше) при сравнении: последовательных чисел или через число, или через два числа и т.д.

Шаг 2. Поиск закономерностей. Попытка определить закономерность в представлении чисел, связанных со степенью числа.

Шаг 3. Поиск других оснований для построения ряда, например, перемножаются две цифры, входящие в предыдущее число.

Шаг 4. Творческий этап. Разработка аналогичных числовых рядов.

Задача № 4. Продолжите ряд: 1, 10, 3, 9, 5, 8, 7, 7, 9, 6?

Схема рассуждений и ход решения

Шаг 1. Использование разработанного алгоритма. Проделываем шаги решения, аналогичные тем, которые прописаны в задаче № 5.

Шаг 2. Поиск нового основания. Например, ряд состоит из двух частей: числа на нечетных местах: 1, 3, 5, 7, 9...; числа на четных местах: 10, 9, 8, 7... Поэтому ряд продолжается так: 11, 5, 13, 4, 15, 3...

Шаг 3. Творческий этап. Разработка аналогичных числовых рядов.

Задача № 5. Числа от одного до девяти расставлены в порядке возрастания, только почему-то одни из них находятся над чертой, а другие – под ней. Отгадайте, сверху или снизу должно стоять число 10?

1 5 7

----------------------

2 3 4 6 8 9

Схема рассуждений и ход решения

Шаг 1. Определяем основания классификации чисел на две представленные группы.

Учащиеся после обсуждений в группе предлагают различные основания для классификации.

Шаг 2. Переход от сложного к более простому.

Если учащиеся не смогут определить правильное основание для классификации, учитель может предложить аналогичную, но более простую задачу, например, «продолжить ряд букв О, Д, Т, Ч, П, …».

Шаг 3. Переход от простого к более сложному.

Определив, что следующей буквой будет Ш (первая буква слова «шесть»), так как в ряде зашифрована последовательность натуральных чисел, выясняем основание для классификации основной задачи.

Шаг № 4. Разумные рассуждения.

Числа в числителе имеют по четыре буквы, а в знаменателе - разное количество, значит, десять нужно поставить в знаменатель.

*Прием решения задач «Задачи на взвешивание»:*

1. изучение содержания задачи;
2. выявление возможных вариантов решения задачи;
3. анализ найденных путей решения и выбор наиболее рационального, требующего наименьшего числа взвешиваний (критический компонент);
4. выявление творческого компонента учащихся за счет разработки аналогичных заданий;
5. соотнесение задачи с личным опытом (рефлексивный компонент);
6. переформулирование условия задачи с целью увеличения или уменьшения числа выборов (корректирующий компонент).

Задача № 6. Имеется 13 монет, из них ровно одна фальшивая, причем неизвестно, легче она настоящих или тяжелее. Требуется найти эту монету. Весы - стандартные для задач этого типа: две чашечки без гирь.

Схема рассуждений и ход решения

Шаг 1. Что дают, например, три взвешивания?

Возможность трех взвешиваний позволяет разбить монеты на три группы. Проблема в том, что количество монет нечетное. Так как монеты выглядят одинаково, то разницы не будет, какую из них отложить пока в сторону.

Шаг 2. Применим нумерацию. Для удобства пронумеруем оставшиеся 12 монет и разобьем на три группы.

Первая четверка: 1 – 2 – 3 - 4;

Вторая четверка: 5 – 6 – 7 - 8;

Третья четверка: 9 – 10 – 11 – 12.

Шаг 3. Поэтапное взвешивание. Поэтапно взвешиваем пары из любой четверки, например, из первой:

- первая - вторая;
- вторая – третья;
- первая – третья и т.д.

Шаг 4. Обсуждение результатов взвешиваний.

Обсуждение результатов каждого из взвешиваний. Учащиеся приходят к выводу, что одно из взвешиваний будет лишним, если, например, фальшивая монета находится среди пронумерованных.

Шаг 5. Уточняющий момент

Если же все-таки фальшивая монета находится среди пронумерованных?

Если первое взвешивание показывает неуравновешенность чашек весов, то осуществляем второе взвешивание.

Если при втором взвешивании чаши весов были в равновесии, значит, фальшивая монета находится в первой четверке. Если же при втором взвешивании чаши весов не находятся в равновесии, то фальшивая монета находится в той четверке, которая участвовала во взвешивании дважды, т.е. во второй.

Шаг 6. Деление «фальшивой» четверки. Распределим четверку монет на равные группы по одной монете каждая и осуществим третье взвешивание.

Шаг 7. Обсуждение необходимого количества взвешиваний.

Убеждаемся в том, что при взвешивании необходимо повторить действия, аналогичные тем, которые прописаны в пятом шаге.

Шаг 8. Обсуждение результатов взвешиваний. А что, если фальшивой окажется все-таки отложенная нами, тринадцатая монета? В этом случае при всех взвешиваниях весы будут сбалансированы.

Шаг 9. Обсуждение количества взвешиваний для нахождения фальшивой монеты и выбор оптимального варианта (критический компонент).

Шаг 10. Разработка аналогичных задач и оформление их решений (творческий компонент).

<u>*Прием решения задач «Логические рассуждения»:*</u>

1. изучение содержания задачи, уточнение уровня математических знаний, необходимого для ее разрешения (содержательный компонент);
2. выдвижение гипотезы поиска решения;
3. выбор способа представления логических рассуждений: табличный, текстовый, на кругах Эйлера, перебором и т.д.;
4. проверка выдвинутых гипотез поиска решения;
5. выбор наиболее оригинального способа решения (творческий компонент);
6. обсуждение результатов (критический компонент);
7. соотнесение задачи с личным опытом (рефлексивный компонент);
8. разработка и решение аналогичных задач, задач творческого характера (творческий компонент);
9. обсуждение дополнительных вопросов к задаче.

<u>Задача № 7</u>. В бутылке, стакане, кувшине и банке налиты молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко находятся не в бутылке, в банке - не лимонад и не вода, а сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. Определите, где какая жидкость.

Схема рассуждений и ход решения

1 способ. Данную задачу можно решить путём логических рассуждений.

Шаг 1. Озвучивание первых выводов, осуществленных из прочтения текста задачи в «один круг» (один раз).

- В стакане не находится молоко, так как стакан находится рядом с сосудом с молоком.

- Вода не находится в бутылке.
- Молоко не находится в бутылке.
- Лимонад не в банке.
- Вода не в банке.
- В кувшине не лимонад и не квас.
- В банке не находится молоко.

Шаг 2. Логический вывод. Значит, в банке находится квас.

Шаг 3. Выстраивание рассуждений о лимонаде.

Если лимонад не в банке, не в кувшине, значит, он может находиться в бутылке или в стакане. В бутылке не находится вода и молоко (шаг 1) и не находится квас (шаг 2).

Шаг 5. Логический вывод. Значит, в бутылке - лимонад.

Шаг 6. В кувшине не лимонад и не квас, значит, в нем может находиться молоко или вода. В стакане не молоко (шаг 1).

Шаг 7. Логический вывод. Значит, в кувшине находится молоко.

Шаг 8. Логический вывод. Значит, в стакане находится вода.

Шаг 9. Оформление решения и ответа задачи.

2 способ. Оформление решения задач в виде таблицы

Шаг 1. Начало рассуждений. Рассуждения начинаем с предложения «Известно, что вода и молоко находятся не в бутылке, в банке - не лимонад и не вода, а сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом». Значит, Сидоров не контролер и не кассир (Рис. 5.).

| | вода | молоко | лимонад | квас |
|---|---|---|---|---|
| бутылка | - | - | | - |
| стакан | | - | | - |
| кувшин | | | - | - |
| банка | - | - | - | + |

Рис. 5

Отмечаем в таблице при пересечении строки «банка», со столбцами «вода», «молоко», «лимонад» ставим минусы.

Шаг 2. Тогда в последней клетке столбца «квас» остается поставить плюс.

Шаг 3. Если в последней строке в одной клетке стоит знак «+», значит, в остальных клетках этой строки нужно поставить знаки «-», так как только один человек может соответствовать представленной должности (Рис.6).

| | вода | молоко | лимонад | квас |
|---|---|---|---|---|
| бутылка | - | - | + | - |
| стакан | | - | - | - |
| кувшин | | | - | - |
| банка | - | - | - | + |

Рис. 6

Шаг 4. Возвращаемся к задаче и делаем вывод, что лимонад в бутылке.

На пересечении строки «бутылка» и столбца «лимонад» ставим «+» и заполняем оставшиеся пустые клетки из расчета того, что в каждой строке и каждом столбце стоит только по одному плюсу (Рис.7).

| | вода | молоко | лимонад | квас |
|---|---|---|---|---|
| бутылка | - | - | + | - |
| стакан | + | - | - | - |
| кувшин | - | + | - | - |
| банка | - | - | - | + |

Рис. 7

<u>Задача № 8</u>. Ложные утверждения.

Перед вами четыре утверждения, три из которых являются ложными.
Найдите их.

$\lg 21 - \lg 3 = \lg 7$.

$8^{2x} : 8^{5,5x} = -3,5x$.

$\log_2 6 + \log_8 125 = \log_2 30$.

$\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{2\pi}{3} = 1,5$.

Схема рассуждений и ход решения

Шаг 1. Проверка вычислений.

Вначале индивидуально учащиеся проверяют правильность проведенных вычислений каждого из представленных примеров.

Шаг 2. Обсуждение результатов.

Под руководством учителя происходит обсуждение каждого примера и вычленение ложных утверждений.

Шаг 3. Ситуация недоразумения.

Проверив все представленные утверждения, учащиеся выявляют только два ложных. Начинается ситуация, при которой ученики вынуждены неоднократно обратиться к алгоритмам выполнения каждого задания.

Шаг 4. Выдвижение гипотез.

Из перечня всех выдвигаемых учащимися гипотез обязательно звучит идея о неверности текста задачи.

Шаг 5. Необходима помощь.

При помощи учителя учащиеся делают вывод, что само утверждение о том, что перед вами три ложных утверждения, является ложным, а следовательно, является этим третьим ложным утверждением.

*<u>Прием решения задач методом перебора:</u>*

1. изучение содержания задачи;
2. выдвижение гипотезы поиска решения;
3. выбор способа представления всевозможных переборов, возникающих при решении задачи (содержательный компонент);

4. проверка осуществления всех возможных переборов (критический компонент);

5. проверка выдвинутых гипотез других способов решения (корректирующий компонент);

6. обсуждение результатов (рефлексивный компонент);

7. обсуждение дополнительных вопросов к задаче на усиление логической составляющей (логическая составляющая).

Задача № 9. Четыре ученика сдают зачет по математике. Зачет считается успешно сданным, если учащийся выполнил все задания, представленные в карточке. Сколькими способами и какими результатами может окончиться зачет?

Схема рассуждений и ход решения

Для решения данной задачи продемонстрируем использование алгоритма творческого процесса (В.П. Зинченко[8]).

Шаг 1.

А. Возникновение темы.

Учитель предлагает учащимся текст задачи.

Б. Восприятие темы, анализ ситуации, осознание проблемы.

На данном этапе учащиеся самостоятельно или при помощи учителя вычленяют условие задачи, её заключение, проводят рассуждения по поиску решения.

В. На этой стадии осуществляется часто мучительная работа над решением проблемы. Возникает ощущение, что проблема - во мне, а я - в проблеме.

Шаг 2.Работа групп учащихся

На данном этапе учащиеся, работая в группах, разрабатывают стратегические пути решения данной задачи.

Шаг 3. Рождение идеи.

Г. Возникновение идеи (равно образ-эйдос) решения (инсайт). На наличие и решающее значение этой стадии имеется бесчисленное множество указаний, но сколько-нибудь содержательные описания отсутствуют, и её природа остаётся неясной.

Шаг 4. Обсуждение идеи.

Происходит обсуждение разработанных каждой группой вариантов решений, и выбирается более рациональный способ решения.

Д. Исполнительная, по сути, техническая стадия».

Шаг 5. Оформление решения задачи.

Введём обозначения для 4 учащихся по первой букве их вымышленных имён.

И рассмотрим различные варианты успешности или неуспешности зачета для каждого из них в виде таблицы. За «1» будем обозначать успешную сдачу зачета, «0»- неуспешную.

При решении применим известный уже нам метод перебора.

При решении используем известный метод перебора (Рис. 8.).

| № п/п | М | И | Д | В |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 11 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 14 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 15 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Рис. 8

Шаг 6. Ищем новый путь.

Возможен и более короткий путь решения, так как задача в итоге свелась к рассмотрению следующей ситуации: сколько последовательностей длины 5 можно составить из цифр 0 и 1? Решить задачу можно при использовании правила произведения, поскольку на каждом месте последовательности у нас выбор из двух возможностей. Таким образом, общее число исходов равно $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^4 = 16$.

Шаг 7.Элемент творчества.

После решения данной задачи учащимся предлагается самим составить текст аналогичных задач с другим числом элементов.

Рассмотрев аналогичные задачи, учащиеся приходят к выводу, что «Если множество N содержит $n$ элементов, то оно имеет $2^n$ подмножеств».

*Замечание:* учитель уточняет, что обобщенный вид такой формулы (для $n$ - элементов) требует доказательства. И для этого существует особый приём доказательства - метод математической индукции.

*<u>Прием решения задач методом включения и исключения</u>*

1. изучение содержания задачи;
2. выдвижение гипотезы поиска решения;
3. осуществление логических рассуждений, связанных с нахождением числа общих элементов всех рассматриваемых множеств, а также числа общих элементов возможных переборов этих множеств: по два, три множества и т.д.;
4. проверка выдвинутых гипотез других способов решения (критический компонент);
5. осуществление решения при помощи формулы метода включения и исключения (в зависимости от числа рассматриваемых множеств);
6. обсуждение результатов и соотнесение с собственным опытом (рефлексивная составляющая)

7. обсуждение дополнительных вопросов к задаче на усиление логической составляющей (логическая составляющая);
8. составление и решение аналогичных задач (творческий компонент).

<u>Задача № 10</u>. Элективный курс по математике посещают 15 учащихся, а по литературе – 12 учащихся. Сколько учащихся посещают курсы по математике или литературе, если:

a. эти курсы проходят в одно и то же время;

b. эти курсы проходят в различное время и по 8 учеников посещают оба курса?

Схема рассуждений и ход решения

Шаг 1.Введем обозначения

C – множество учащихся, посещающих ЭК по математике, буквой D – множество учащихся, посещающих ЭК по литературе.

Шаг 2. Для пункта (а), множества C и D не имеют общих элементов, т. е. $C \cap D = \emptyset$.

Шаг 3. Подсчет общего числа слушателей ЭК.

$15 + 12 = 27$ или $N(C \cup D) = N(C) + N(D) = 15 + 12 = 27$.

Шаг 4. Решение пункта (b) при помощи логических рассуждений.

Для пункта (b), множества C и D имеют общие элементы, т. е.

$C \cap D = 8$. (Рис.9.)

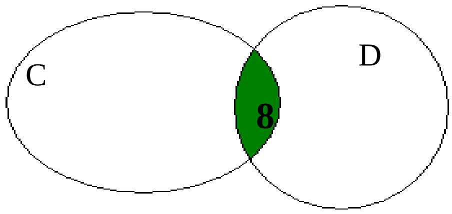


Рис. 9.

Тогда число учащихся, посещающих только ЭК по математике равно 7 ($15 – 8 = 7$). Число учащихся, посещающих ЭК по литературе равно 4 ($12 – 8= = 4$).

Тогда общее число слушателей двух курсов равно сумме участников ЭК только математики, только литературы и слушателей, посещающих оба курса.

Значит, $N(C \cup D) = 7 + 4 + 8 =19$.

Шаг 5. Вычисление числа учащихся с применением формулы метода включения и исключения (1).

$N(C \cup D) = N(C) + N(D) - N(C \cap D) = 15+ 12 – 8 = 27 – 8 = 19$.

<u>*Анализ и синтез*</u>

«Анализ - метод исследования, состоящий в расчленении исследуемого предмета или явления» [24, С. 36. т.1]. Анализ (греч. – разложение, расчленение) Расчленение производится на составляющие элементы с целью последующего их сравнения. Отметим, что при анализе происходит расчленение целостной системы на отдельные элементы, которые сами по себе являются определённым целым.

«Синтез - метод исследования - установление связи и сведение в единое целое отдельных элементов, полученных в процессе анализа» [24, С.

187. т.4]. Синтез (греч.-соединение, сочетание). В результате синтеза происходит построение целого из аналитических частей. Синтез осуществляет мыслительное соединение в единое целое частей предмета или его признаков, которые образовались из анализа.

Задача № 11.[22] Доказать неравенство: среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.

Таблица 2

| Идя сверху вниз, мы осуществляем анализ доказательства | | Перейдя от анализа к синтезу, учащийся ведёт рассуждение снизу вверх, нанизывая последовательно цепь достаточных условий (от основания к заключению) |
|---|---|---|
| ***Анализ***<br>***(читается сверху вниз)***<br>Требуется доказать.<br>1. Возведём обе части в квадрат и затем умножим на *4*.<br>2. Раскроем скобки в левой части неравенства.<br>3. Перенесём в левую часть выражение *4ав*.<br>4. Представим левую часть в виде квадрата разности.<br>Последнее выражение есть истинное суждение, так как квадрат любого числа есть число неотрицательное. | $\frac{a+в}{2} \geq \sqrt{ав}$<br>$(a+в)^2 \geq 4ав$<br>$a^2+2ав+в^2 \geq 4ав$<br>$a^2-2ав+в^2 \geq 0$<br>$(a-в)^2 \geq 0$ | ***Синтез***<br>***(читается снизу вверх)***<br>Неравенство доказано.<br>5. Раздели обе части на *4* и извлечём квадратные корни.<br>4. Представим левую часть в виде квадрата суммы.<br>3. Прибавим к обеим частям по *4ав.*<br>2. Раскроем скобки в левой части.<br>1. Напишем неравенство верное для любых действительных чисел. |

Сравнение двух путей рассуждения полезно, так как является логической тренировкой учащихся и, кроме этого, в них встречаются взаимно-обратные операции (возведение в квадрат - извлечение квадратных корней; вычитание *4ав* - прибавление *4ав* и т.д.)

*Замечание:* по мнению А.А. Люблинской, «мыслительный процесс включает в себя три обязательных звена: синтез 1-первичный (восприятие задачи как целого), анализ (дробление задачи на части, выделение её условий, данных), синтез 2 - вторичный (решение, новое понимание всей задачи)», что позволяет говорить о неизменном использовании и формировании логических операций (анализа, синтеза) на протяжении всей сознательной жизни человека.

К нисходящему анализу В.А. Гусев относит и метод доказательства от противного (поиск необходимых условий справедливости положения, противоречащего заключению теоремы).

Рассмотрим доказательство методом от противного (хотя с данным методом очень часто мы встречаемся на уроках геометрии).

Задача № 12. [22] Доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$ .

Допустим противное: $\sqrt{2}$ рационален, то есть представляется в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где $m$ и $n$ — натуральные числа(анализ). Возведём предполагаемое равенство в квадрат: $\sqrt{2}=\frac{m}{n} \Rightarrow 2=\frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$.

Отсюда следует, что $m^2$ чётно, значит, чётно и $m$; следовательно, $m^2$ делится на 4, а значит, $n^2$ и $n$ тоже чётны (синтез). Полученное утверждение противоречит несократимости дроби $\frac{m}{n}$ (анализ). Значит, исходное предположение было неверным, и — $\sqrt{2}$ иррациональное число (синтез).

**Задача 13 (ЕГЭ, С2.)** В правильной треугольной пирамиде со стороной основания, равной 12 , и двугранным углом при основании, равным $60^0$ , расположены два шара. Первый шар касается всех граней пирамиды, а второй шар касается всех боковых граней пирамиды и первого шара. Найдите радиус второго шара.

*Решение.*

*Шаг 1.* Проведя несложный анализ, обнаруживаем, что шары расположены один над другим. Но только один из них, а именно, тот, который касается всех граней пирамиды, будет вписан в данный многогранник.

*Шаг 2.* Для удобства выполним построение правильной треугольной пирамиды (Рис.10.), а шары покажем только их радиусами, так как построение самих геометрических фигур (шаров), представленных в задаче, достаточно трудоемкое дело. Тем более, что по тексту задачи нам нет необходимости выполнять полный чертеж.

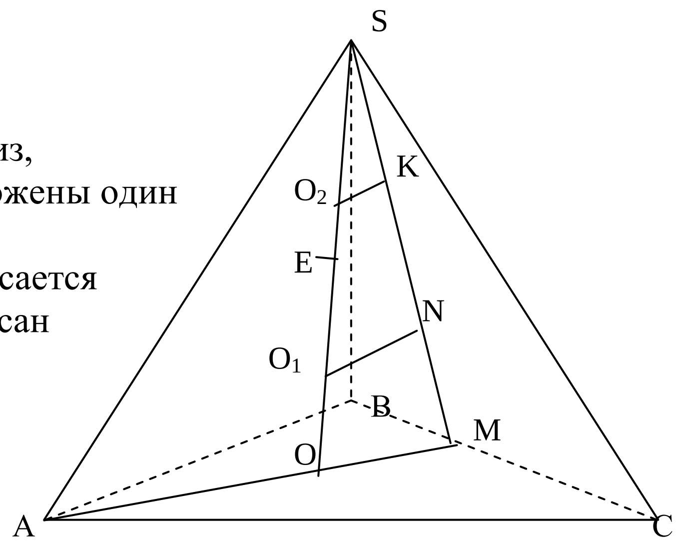


Рис. 10

*Шаг 3.* Опишем каждую из составляющих нашего рисунка.

1) AM- средняя линия правильного треугольника основания пирамиды.

2) Центр вписанного шара будет проецироваться в центр правильного треугольника (точка пересечения высот, медиан, биссектрис треугольника). Основание высота пирамиды также располагается в точке О. SM - высота, проведенная в боковой грани (апофема). Двугранный угол при основании равен линейным углам двугранного угла, например, SMA. Величина этого угла равна по условию задачи $60^0$.

3) $O_1N=O_1O=O_1E$ - радиусы вписанного шара, а значит, перпендикулярны соответственно к прямым SM и AM.

4) $O_2E=O_2K$- радиусы второго шара, который касается всех боковых граней пирамиды и первого шара. Радиус $O_2K$ перпендикулярен прямой SM.

5) Радиусы $O_2E$ и $O_1E$ будут перпендикулярны общей касательной, проведенной к двум шарам в точке их касания – точке Е.

*Шаг 4.* Рассмотрим Δ АСМ. АС=12, МС=6

Составим равенство согласно теоремы Пифагора для треугольника АСМ.

$AM^2=12^2-6^2$, $AM^2=108$, $AM=6\sqrt{3}$

*Шаг 5.* Рассмотрим Δ SOM (Рис. 11).
Это прямоугольный треугольник в котором угол OSM равен $30^0$, а значит, SM=2 OM.

$OM=\frac{1}{3}AM$ (в правильном треугольнике центр треугольника является центром вписанной и описанной окружности и делится этой точкой в отношении 2:3, считая от вершины).

$OM=2\sqrt{3}$, значит, $SM=4\sqrt{3}$

*Шаг 6.* Пусть OS=x, Составим равенство по теореме Пифагора для треугольника SOM.

$SO^2+OM^2=SM^2$ или $x^2+12=48$ (*)

Преобразуем равенство (*)

$x^2=36$; x=6 . Отсюда высота пирамиды SO=6.

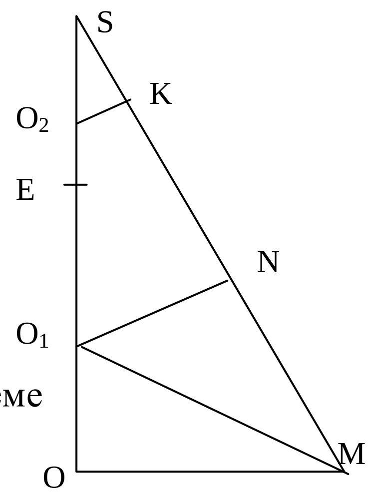


Рис. 11

*Шаг 7.* Рассмотрим треугольник $O_1OM$.

$\angle O_1MO=30^0$.

$tg30^0=\frac{OO_1}{OM}$, $OO_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{3}=2$

*Шаг 8.* Рассмотрим подобные треугольники SOM и $SO_2K$ (в данных треугольниках имеются углы в $30^0$, $90^0$).

$\frac{OM}{SM}=\frac{O_2K}{SO_2}$ (**) Где $SO_2=OS-2OO_1-O_2E$ или $SO_2=6-4-O_2E=2-O_2E$.

*Шаг 9.* Подставим все данные в равенство (**), учитывая, что $O_2E=O_2K$.

$\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{O_2E}{2-O_2E}$ Или $2-O_2E=2O_2E$. В итоге получаем, что $O_2E=\frac{2}{3}$

Ответ: Радиус второго шара равен $\frac{2}{3}$

*Шаг 10.* Поиск новых путей решения данной задачи (в частности рассмотрения другой пары подобных треугольников, например, $SO_2K$ и $SO_1N$).

**<u>Задача № 14</u>.** В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 10, 8 и 6 . Каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом $45^0$ . Через середину высоты проведена плоскость параллельно основанию. Найдите объём полученной усечённой пирамиды.

Решение.

Из условия имеем:

1. S ABC- треугольная пирамида, $\Delta$ABC- основание пирамиды;

2. AB=10, AC=8, BC=6;

3. S- вершина пирамиды, угол наклона боковых ребер к плоскости основания равен $45^0$;

4. (MNP)-плоскость, параллельная основанию пирамиды, проходящая через середину высоты пирамиды.

Требуется найти $V_{\text{усеченной пирамиды.}}$

*Шаг 1.* Из перечисленных условий очень сложно что-то непосредственно получить, поэтому потребуется достаточно глубокий анализ.

*Шаг 2.* Так как все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, тогда проекции боковых ребер на плоскость основания также будут равны (Рис. 12). $\angle SBO=\angle SAO=\angle SCO=45^0$ (по условию), $\angle SOB=\angle SOA=\angle SOC=90^0$ (по определению высоты), SO- общий катет,

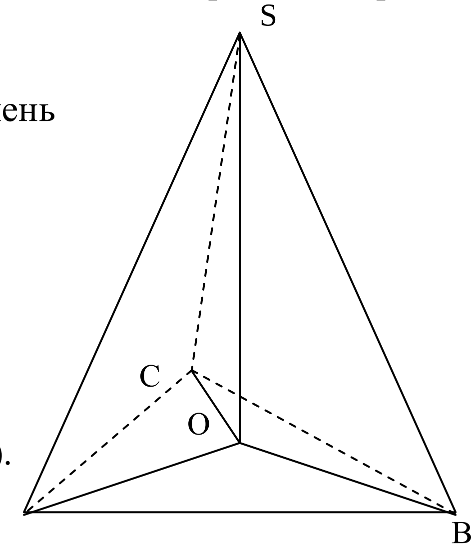


Рис. 12

значит $\Delta SBO=\Delta SAO=\Delta SCO$ (по катету и противолежащему углу).

*Шаг 3.* Так как OB=OC=OA (как соответствующие стороны равных треугольников (шаг 2)), значит O- центр описанной окружности около $\Delta$ABC.

*Шаг 4*. Для сторон треугольника ABC справедливо соотношение теоремы Пифагора, т.е. $10^2=8^2+6^2$ или 100=64+36, Значит, $\Delta$ABC- прямоугольный.

*Шаг 5.* Так как $\Delta$ABC- прямоугольный, тогда центр описанной окружности находится на середине гипотенузы, а значит требуется уточнить рисунок к задаче.

*Шаг 6.* Корректировка рисунка к задаче (Рис.13)

*Шаг 7.* Рассмотрим один из равных треугольников $\Delta SBO=\Delta SAO=\Delta SCO$.

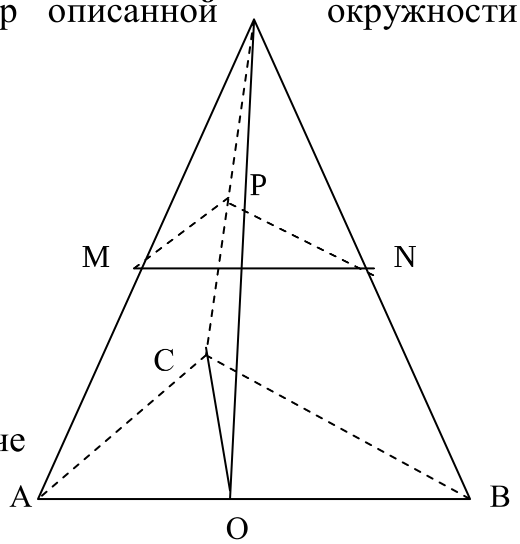


Рис. 13

Треугольник AOS – равнобедренный. Так как $\angle SOA=90^0$, $\angle SAO=45^0$, то $\angle ASO=45^0$ .

*Шаг 8.* Из того, что треугольник
AOS – равнобедренный следует,
что SO=AO=5.

*Шаг 9.* $V_{\text{усеченной пирамиды}} = V_{(SABC)} - V_{(SMNP)}$

*Шаг 10.* $V_{(SABC)} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot H$ ; $S_{\Delta ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$ ; $V_{(SABC)} = 40$

*Шаг 11.* Площадь треугольника MNP будет в четыре раза меньше площади основания, так как по условию секущая плоскость параллельно основанию и проведена через середину высоты, т.е. каждая сторона $\Delta$MNP в два раза меньше соответствующих сторон $\Delta$ABC. Значит $S_{\Delta MNP}=6$.

*Шаг 12.* $V_{(SMNP)} = \frac{1}{3} 6 \cdot \frac{H}{2} = 5$

*Шаг 13.* $V_{\text{усеченной пирамиды}} = V_{(SABC)} - V_{(SMNP)} = 40 - 5 = 35$

*Шаг 14.* Поиск других вариантов решения задачи.

*Шаг 15.* Составление аналогичных задач.

Решение данной задачи является ярким примером соединения анализа и синтеза.

*Замечание*: связь между этими познавательными процессами можно увидеть при условии, когда от формулы «анализ и синтез» переходим к психологической формуле «анализ через синтез» или, ещё лучше, к циклической трёхчленной формуле «анализ – синтез - анализ».

## *Задачи на обобщение и аналогию*

Обобщение - это обнаружение взаимосвязи, взаимоотношения общего и единичного. Такое обобщение также, как и абстрагирование можно назвать содержательным обобщением. В.В. Давыдов [5] также выделяет эмпирическое обобщение, которое устанавливает формальные родовидовые зависимости в различных классификациях.

Полнота обобщения зависит от спектра вариаций сочетаемых признаков, от наличия в рассматриваемом предмете или явлении разнообразных сочетаний общего качества.

Аналогия есть заключение о сходстве двух предметов в каком-либо признаке на основании их сходства в части других признаков.

Задача № 15. [22] Доказать неравенство для неотрицательных *a, b, c*

$a + в + c \geq \sqrt{ав} + \sqrt{вс} + \sqrt{ac}$

При решении данной задачи будем исходить из имеющихся у учащихся знаний, а именно: формулы квадрата разности.

Так как $\left(\sqrt{a} - \sqrt{в}\right)^2 \geq 0$, то, воспользовавшись формулой квадрата разности двух выражений и произведя несложные преобразования, придём к неравенству вида

$$a + в \geq 2\sqrt{ав} \qquad (1)$$

По аналогии запишем ещё два неравенства

$в + с \geq 2\sqrt{вс}$ (2)

$а + с \geq 2\sqrt{ас}$ (3)

Сложив почленно левые и правые части неравенств 1, 2 и 3 и разделив обе части на 2, получим доказываемое неравенство

$а + в + с \geq \sqrt{ав} + \sqrt{вс} + \sqrt{ас}$ (4)

Для решения данной задачи мы работали в «зоне ближайшего развития» учащихся, так как мы работаем только с той информацией, которая учащимся знакома ещё с 7-го класса. Кроме этого мы использовали (пусть даже опосредованно) схему умозаключения по аналогии

Первая посылка. Предмет А обладает свойствами а, в, х.

Вторая посылка. Предмет В обладает свойствами а, в.

Заключение. Вероятно, предмет В обладает и свойством х.

*Задачи на индукцию и дедукцию*

Индукция и дедукция, представляющие собой взаимосвязанные логические категории, помогают характеризовать мысль с точки зрения её возникновения.

Задача №16

Докажите, что при всяком $n \in N$ число $10^n$+45n-1кратно 27.

Решение:

Шаг 1. Докажем методом математической индукции.

Шаг 2. Проверим справедливость для *n*=1

При n=1 получаем $10^1$+45-1=34, число 34:27=2 –верно

Шаг 3. Будем считать, что при *n*=*к* кратность выполняется.

То есть $10^к$+45к-1кратно 27 (1).

Шаг 4.

Докажем справедливость для следующего значения, т.е. при *n* =*к*+1

При *n* =*к*+1 получаем $10^{к+1}$+45(к+1)-1 (2)

Произведем преобразования в выражении (2)

$10^{к+1}+45(к+1)-1=10 \cdot 10^к+45к+45-1=10 \cdot (10^к+45к-1)-9 \cdot 45^к+54$ (3)

Выражение $10^к$+45к-1кратно 27 (1) (по предположению шага 3), очевидно, что 54 кратно 27.

Требуется доказать, что выражение (второе слагаемое выражение 3) $9 \cdot 45^к$ кратно 27.

Шаг 5. Докажем, что выражение $9 \cdot 45^к$ кратно 27. (индукция в индукции)

Шаг 6. Проверим справедливость для *n*=1

При n=1 получаем $9 \cdot 45^1$кратно 27, так как произведение делится 27.

Шаг 7. Путь для *n*=р $9 \cdot 45^p$кратно 27.

Шаг 8. Докажем кратность выражения при *n*=р+1

$9 \cdot 45^{p+1}=9 \cdot 45 \cdot 45^p$. Так как $9 \cdot 45^1$кратно 27, то и все выражение кратно 27.

Шаг 9. Вывод

Так как кратность справедлива при *n* =*к*+1, значит при всяком $n \in N$ число $10^n$+45n-1кратно 27.

*Неупорядоченные перестановки, размещения, сочетания*

Перестановки - это комбинации или соединения из $n$ элементов, содержащие все элементы и считающиеся различными, если отличаются порядком элементов.

Размещения из $n$ элементов по $k$ - это комбинации или соединения, содержащие $k$ различных элементов и считающиеся различными, если отличаются либо своими элементами, либо порядком элементов.

Сочетаниями из $m$ элементов множества $A$ по $n$ элементов называются соединения, содержащие $n$ элементов, а отличаются они хотя бы одним элементом, но не порядком.

*Прием определения различий между понятиями «сочетание» - «размещение»:*

1. вычленение основного множества;

2. вычленение из основного множества нескольких элементов;

3. сравнение множеств вычлененных элементов с различными вариантами перестановок;

4.осуществление необходимого вывода о важности (последовательность) или неважности (подмножество) перестановок в образованных множествах вычлененных элементов;

5. осуществление окончательного вывода:

Порядок не важен – подмножество вычлененных элементов – понятие «сочетание».

Порядок важен – последовательность вычлененных элементов – понятие «размещение».

Задача № 17. Сколькими способами можно разместить во время проведения итоговой аттестации по алгебре 12 учащихся девятого класса за двенадцатью столами так, чтобы за каждым столом сидело по одному ученику.

Решение.

Воспользуемся определение и формулой перестановок, $P_{12} = 12! = 479001600$

Задача № 18. Организаторы областной математической олимпиады для учащихся 9-11 классов решили ввести оригинальное определение числа участников и номера кодировок их выполненных работ. Чтобы узнать, какое количество участников необходимо пригласить на конкурс, нужно высчитать все возможные варианты трёхзначных чисел, которые можно составить из цифр 3, 6, 2, 5, 7, 8 так, чтобы каждая цифра в числе использовалась единожды.

Решение.

Шаг 1. Вычленение основного множества.

А - множество всевозможных трёхзначных чисел, которые можно составить из цифр 3, 6, 2, 5, 7, 8 так, чтобы каждая цифра в числе использовалась единожды.

Шаг 2. Вычленение из основного множества нескольких элементов.

Выберем, например, три цифры – 6, 3, 5.

Шаг 3. Сравнение множеств вычлененных элементов с различными вариантами перестановок: {6, 3, 5}; {6, 5, 3} или {3, 6, 5} и т.д.

Шаг 4. Осуществление необходимого вывода о важности (последовательность) или неважности (подмножество) перестановок в образованных множествах вычлененных элементов.

В данной задаче перестановка цифр задает различные числа, следовательно, важен порядок расположения элементов, т.е. каждой цифре присваивается свой личный номер, значит, выборочные элементы задают последовательности.

Шаг 5. Осуществление окончательного вывода: Порядок важен – последовательность вычлененных элементов – понятие «размещение». При решении этой задачи используем формулу размещений.

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$$

<u>Задача № 19</u>. Школьному координатору по проведению итоговой аттестации учащихся 11 классов необходимо разместить в период с 26 мая по 5 июня три экзамена из шести, которые были определены выбором учащихся.

Решение.

В данной задаче, например, геометрия, физика, химия и всевозможные перестановки являются одним вариантом, то для решения воспользуемся формулой сочетаний. $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 20$

*<u>Упорядоченные перестановки, размещения, сочетания</u>*

Упорядоченные $n$-ки, содержащие $\text{к}_i$ раз элемент $a_i \in A (i = 1,2,..., m)$, причем $\sum_{i=1}^{n} k_i = n$, называются перестановками с повторением.

<u>Задача № 20</u>. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «параллелепипед»?

Решение.

Искомые слова представляют собой перестановки с повторением ($n = 14$ - число букв в слове) из элементов-букв В = (п, а, р, л, е, и, д) множества причем $k_1 = k_4 = k_5 = 3,\ k_2 = 2,\ k_3 = k_6 = k_7 = 1$. Следовательно, их число равно

$$P_{14}(3,3,3,2,1,1,1) = \frac{14!}{3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} =$$

$$\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2} = 4\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 13\cdot 14 = 201801600$$

Сочетаниями из $m$ элементов множества $A$ по $n$ элементов с повторениями называются соединения, содержащие $n$ элементов, причем среди них могут быть одинаковые, а отличаются они хотя бы одним элементом, но не порядком.

Задача № 21. [22] Сколько имеется костей в обычной игре «домино»?

Решение.

Кости домино можно рассматривать как сочетания с повторениями по две из семи цифр множества (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6). Воспользуемся формулой $\overline{C_m^n} = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^{n}$. Число всех таких сочетаний равно $\overline{C_7^2} = C_8^2 = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = \frac{7\cdot 8}{1\cdot 2} = 28$

Ответ: 28 костей в обычной игре «домино».

Рассмотрим ещё один вид расстановок - размещения с повторениями.

Даны предметы, относящиеся к $n$ различным видам. Из них составляют всевозможные расстановки по $k$ предметов в каждой - $k$-расстановки. При этом в расстановки могут входить и предметы одного вида, а две расстановки считаются различными, если они отличаются друг от друга или видом входящих в них предметов, или порядком этих предметов. Нужно найти общее число таких расстановок.

Расстановки указанного типа называются k-размещениями с повторениями из элементов n видов. Число всех таких расстановок можно найти по формуле $\overline{A_m^n} = m^n$

Задача № 22. Сколько трехбуквенных «слов» можно составить из букв «Б» и «С»? Результат проверить непосредственно. Решение. Составим несколько таких «слов»: БСБ, БСС, ББС, БББ, СБС, СББ, ССБ, ССС. Мы видим, что состав выборки меняется, порядок элементов в выборке существенен. Значит, это - размещения с повторениями из 2 букв «Б» и «С» по 3 буквы. $\overline{A_2^3} = 2^3 = 8$. Выпишем непосредственно все эти 8 «слов».

БСБ, БСС, ББС, БББ, СБС, СББ, ССБ, ССС.

## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Основными признаками эффективности реализации педагогических условий считаются признаки: целостности, систематизации, совместимости, оптимальности.

Проверим обоснованность каждого из представленных принципов в нашем исследовании.

***Признак целостности.*** Система задач предусматривает целостное представление каждого из представленных типов упражнений.

***Признак систематизации.*** Представление реализуемого содержания задач по математике, представленная типология задач и алгоритмы работы над каждым его видом, позволяют систематизировать предметные знания, развивать навыки классифицировать, обобщать, анализировать, синтезировать исходные данные, находить признаки аналогии и различия.

***Признак совместимости.*** Подборка заданий разработана на основе выявленных противоречий исследования, а также с учетом ближней и дальней целей выстраивания профессиональной карьеры старшеклассника.

***Признак оптимальности.*** Оптимальный выбор временных рамок, переход на новые знания через моделирование известных способов. Оптимально выбранные инновационные технологии, предложенные уровневые варианты оценочных материалов (тестов), позволяют более качественно оценить познавательный уровень ученика.

В данном пособии мы представили только некоторые виды задач, направленные на развитие комбинаторно-логического мышления старшеклассников. При необходимости, каждый учитель может подобрать или самостоятельно разработать систему задач для качественной подготовки к итоговой аттестации; чтобы учащиеся научились находить как можно больше вариантов подхода к одной и той же проблеме, а также могли выбрать наиболее оптимальный, исходя из поставленных целей и задач; научились осуществлять саморефлексию и рефлексию других; умели переформулировать задачу, подходить к ее решению и оформлению решения с различных сторон; могли осуществить выбор способа саморазвития, останавливаясь на предпоследнем (творческом компоненте) или реализуя все шаги решения любой рассматриваемой задачи, тем самым полностью пройдя представленный путь развития комбинаторно-логического мышления

## Литература


1. *Виленкин, Н. Я.* Индукция. Комбинаторика. – М.: Просвещение, 1976;
2. *Виленкин, Н. Я*. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.
3. *Гальперин, П. Я.* Введение в психологию. – М.: Издательство Московского университета, 1976.
4. *Гусев, В. А.* Психолого-педагогические основы обучения математике – М.: ООО «Издательство «Вербум-М», ООО «Издательский центр «Академия», 2003.
5. *Давыдов, В. В*. Проблемы развивающего обучения: опыт теоретического и экспериментального исследования. – М.: Педагогика, 1986. – 111 с.
6. *Зак, А.З.* Как развивать логическое мышление? 800 занимат. задач для детей 6-15 лет. - М. АРКТИ, 2003.
7. *Занков, Л. В.* Избранные педагогические труды. – М.: Педагогика, 1990. – 421 с.
8. *Зинченко, В. П.* Психологические основы педагогики (Психолого-педагогические основы построения системы развивающего обучения Д. Б. Эльконина – В. В. Давыдова): учеб. пособие. – М.: Гардарики, 2002. – 431 с.
9. *Колягин, Ю.М., Ткачева, М.В. , Федорова, Н.Е. , Шабунин, М.И.* «Алгебра и начала анализа», 10, 11 классы- М.: Просвещение, 2008 г.
10. *Концепция* профильного обучения на старшей ступени общего образования // Образование в современной школе. – 2003. – № 2. –С. 621.

11. *Кордемский, Б. Л.* Очерки о математических задачах на смекалку. – М.: Учпедгиз, 1958.

12. *Кузьмин О.В.* Комбинаторные методы решения логических задач: учебное пособие, - М.: Дрофа, 2006.

13. *Кузьмин, О. В.* Перечислительная комбинаторика: учебное пособие. – М.: Дрофа, 2005.

14. *Кузьмин, О. В., Попова Т. Г.* О важности комбинаторно-логического мышления» // Проблемы учебного процесса в инновационных школах. – Вып. 12: Сб. научн. тр. / под ред. О. В. Кузьмина. – Иркутск: Иркут. ун-т, 2007. – С. 113–123.

15. *Кулько, В. А., Цехмистрова, Т. Д.* Формирование у учащихся умений учиться. – М.: Просвещение, 1983. – 80 с.

16. *Кульневич, С. В.* Педагогика личности от концепции до технологий: учеб.-практич. пособие для учителей и классных руководителей, студентов, магистрантов и аспирантов пед. учеб. заведений, слушателей ИПК. – Ростов н/Д.: Творческий центр «Учитель», 2001. – 160 с.

17. *Лизинский, В. М.* Приемы и формы в учебной деятельности. – М.: Центр «Педагогический поиск», 2004. – 160 с.

18. *Люблинская, Л.Л.* Учителю о психологии младшего школьника. - М.: Просвещение, 1977. – 224 с.

19. *Никольский, С.М., Потапов, М.К., Решетников, Н.Н., Шевкин, А.В.* «Алгебра и начала анализа», 10, 11 классы-М.: Просвещение, 2005-448 с..

20. *Попова, Т. Г.* О развитии комбинаторно-логического мышления старшеклассников» // Российский фестиваль педагогических идей «Открытый урок». – 2008.

21. *Попова, Т. Г.* О важности развития комбинаторно-логического мышления старшеклассников // Известия РГПУ, 2008. – № 24 (55). – С. 428–432.

22. *Попова, Т.Г.* Математика. 10-11 классы. Развитие комбинаторно-логического мышления. Задачи, алгоритмы решений - Волгоград: Учитель, 2009.-111 с.

23.*Пойа, Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Издательство «Наука», главная редакция физико-математической литературы, 1975.

24.*Ушаков, Д.Н.* Толковый словарь русского языка под редакцией - М.:ТЕРРА,1996.

25.*Фридман, Л.М.* и др. Как научиться решать задачи: Беседы о решении мат. Задач. Пособие для учащихся/ Л.М. Фридман, Е.Н.Турецкий, В.Я. Стеценко; под. Ред. Л.М.Фридмана. - М.: Просвещение, 1979. – 160 с., ил.

26. *Эрдниев, П.М.*, Эрдниев Б.П. Обучение математике в школе / Укрупнение дидактических единиц. Книга для учителя - 2 изд. испр. и доп. - М.: АО «Столетие», 1996.

## Содержание